CHUYÊN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác đưa về bậc hai và bậc cao cùng 1 hàm lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 X + b\sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 X + b\cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 X + b\tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 X + b\cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \ne k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 X$, $\cos^2 X$ hoặc $t = |\sin X|$, $|\cos X|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$.

Giải:

$$\text{pt} \Leftrightarrow 4(1-\sin^2 x) - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

☑ Với $\sin x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

Giải:

$$\text{pt} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0$.

Giải:

$$\text{pt} \Leftrightarrow 3\left(1-2\sin^2 x\right)+7\sin x+2=0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x+7\sin x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{5}{3}\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x=\frac{5}{3}$ thì pt vô nghiệm vì $\sin x\in[-1;1]$

☑ Với $\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $4\sin^4 x+5\cos^2 x-4=0.$

Giải:

$$\text{pt}\Leftrightarrow 4\sin^4 x+5\left(1-\sin^2 x\right)-4=0\Leftrightarrow 4\sin^4 x-5\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x=1\\ \sin^2 x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

☑ Với $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos^2 x=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

☑ Với $\sin^2 x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\cos 4x+12\sin^2 x-1=0.$

Giải:

$$\text{pt}\Leftrightarrow\left(2\cos^2 2x-1\right)+6\left(1-\cos 2x\right)-1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-6\cos 2x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=2\end{array}\right.$$

☑ Với $\cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

☑ Với $\cos 2x=2$ thì phương trình vô nghiệm

Ví dụ 6. Giải phương trình: $-\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0.$

Giải:

Điều kiện $\cos x\neq 0$

$$\text{pt}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2 x}+2.\frac{1}{\cos x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}=2\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG 1

BT 1. [1D1-2]Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

b) $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$

c) $2\sqrt{2}\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + 1 = 0.$

d) $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0.$

e) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$

f) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$

g) $2\cos^2 x + (\sqrt{2}-2)\cos x = \sqrt{2}.$

h) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x = \sqrt{6}.$

i) $\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0.$

j) $2\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0.$

k) $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0.$

l) $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0.$

m) $\sqrt{3}\cot^2 x - (1+\sqrt{3})\cot x + 1 = 0.$

n) $\sqrt{3}\cot^2 x + (1-\sqrt{3})\cot x - 1 = 0.$

Lời giải

a) [1D1-2] $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) [1D1-2] $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{7}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $2\sqrt{2}\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

d) [1D1-2] $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

e) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

f) [1D1-2] $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-2\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

g) [1D1-2] $2\cos^2 x+(\sqrt{2}-2)\cos x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

h) [1D1-2] $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x=\sqrt{6}.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{5\pi}{6}k2\pi\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

i) [1D1-2] $\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left(\tan x+\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

j) [1D1-2] $2\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x-3=0$

$$\Leftrightarrow \tan x=\dfrac{\sqrt{3}\pm 3}{2} \Leftrightarrow x=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}\pm 3}{2}\right)+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

k) [1D1-2] $\tan^2 x+(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right., \left(k,l\in\mathbb{Z}\right).$$

l) [1D1-2] $3\cot^2 x+2\sqrt{3}\cot x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cot x+1\right)^2=0 \Leftrightarrow \cot x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

m) [1D1-2] $\sqrt{3}\cot^2 x-(1+\sqrt{3})\cot x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=1\\ \cot x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right., \left(k,l\in\mathbb{Z}\right).$$

n) [1D1-2] $\sqrt{3}\cot^2 x+(1-\sqrt{3})\cot x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = 1 \\ \cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + l\pi\end{array}\right., (k, l \in \mathbb{Z})$$

BT 2. [1D1-2] Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

c) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1).$

d) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0.$

e) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0.$

f) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0.$

g) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0.$

h) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7.$

i) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1.$

j) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0.$

Lời giải

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{4}{3}\end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

☑ Với $\sin x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 2\end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

☑ Với $\sin x = 2 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

c) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1) \Leftrightarrow 3 - 4\left(1 - \sin^2 x\right) = 2\sin^2 x + \sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

☑ Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

d) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow -\left(1-\cos^2 x\right) - 3\cos x + 3 = 0$

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = 2 \end{array}\right.$.

☑ Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\cos x = 2 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

e) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0. \Leftrightarrow -2\left(1-\cos^2 x\right) - 3\cos x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

☑ Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2 2x\right) + 5\sin 2x + 1 = 0$

$2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

☑ Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\sin x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

g) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(1-\cos^2 x\right) + 2\cos^4 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$

☑ Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

h) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow 4\sin^4 x + 12\left(1-\sin^2 x\right) - 7 = 0$

$$4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x = \frac{5}{2}\\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{5}{2}\\ 1 - 2\sin^2 x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -4\\ \cos 2x = 0\end{array}\right..$$

☑ Với $\cos 2x = -4 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

☑ Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

i) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 4\cos^4 x = 4\left(1 - \cos^2 x\right) - 1$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x = \frac{1}{2}\\ \cos^2 x = -\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos^2 x = -\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

☑ Với $\cos^2 x = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

☑ Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

j) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^4 x + 5\left(1 - \sin^2 x\right) - 4 = 0$

$$4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 1\\ \sin^2 x = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 - \sin^2 x = 0\\ \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

☑ Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

BT 3. [1D1-3] Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

b) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

c) $9\sin x + \cos 2x = 8$.

d) $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$.

e) $3\sin x + \cos 2x = 2$.

f) $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$.

g) $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$.

h) $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$.

i) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2$.

j) $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0$.

Lời giải

a) [1D1-3] $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

Ta có: $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x - 1\right) - 8\cos x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{3}{2} (l) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

☑ Với $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

b)[1D1-3] $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

Ta có: $1 + \cos 2x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) [1D1-3] $9\sin x + \cos 2x = 8$.

Ta có: $9\sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 9\sin x = 8$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{7}{2} \ (l) \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) [1D1-3] $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$.

Ta có: $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0 \Leftrightarrow 2 + 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 3 \ (l) \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

e)[1D1-3] $3\sin x + \cos 2x = 2$

Ta có: $3\sin x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 3\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☑ Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

f) [1D1-3] $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0.$

Ta có: $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 8\sin x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow -4\sin^2 x + 8\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{3}{2}(l) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

g) [1D1-3] $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0.$

Ta có: $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

☑ Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑ $\sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

h) [1D1-3] $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0.$

Ta có: $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow -10\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 1 \\ \sin\frac{x}{2} = -\frac{6}{5}(l) \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$

i) [1D1-3] $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2.$

Ta có: $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -2\,(l) \end{array}\right.$$

☑ Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

j) [1D1-3] $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0.$

Ta có: $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow -3\sin^2 x - \sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{4}{3}\,(l) \end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

BT 4. [1D1-3] Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1.$

b) $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0.$

c) $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0.$

d) $16\sin^2 \frac{x}{2} - \cos 2x = 15.$

e) $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$

f) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}.$

g) $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0.$

h) $8\cos^2 x - \cos 4x = 1.$

i) $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4.$

j) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$

k) $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0.$

l) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0.$

Lời giải

a. [1D1-3] $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$

$\Leftrightarrow 3\left(1 - \sin^2 x\right) - 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 3\sin x - 1$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\sin x = 2$ (loại)

$\Leftrightarrow \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b. [1D1-3] $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + 6\left(1 + \cos 2x\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 6\cos 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1$ hay $\cos 2x = -2$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

c. [1D1-3] $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - \left(1 + \cos 2x\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1$ hay $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ hay $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

d. [1D1-3] $16\sin^2 \frac{x}{2} - \cos 2x = 15$.

$\Leftrightarrow 8\left(1 - \cos x\right) - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 15$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 8\cos x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$ hay $\cos x = -3$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

e. [1D1-3] $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 1 - \cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -2$ (loại) hay $\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

f. [1D1-3] $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2\left(1 + \cos x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 3$ (loại) hay $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

g. [1D1-3] $1+\cos 4x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 1+2\cos^2 2x - \left(1-\cos 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ hay $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

h. [1D1-3] $8\cos^2 x - \cos 4x = 1$

$\Leftrightarrow 4\left(1+\cos 2x\right) - 2\cos^2 2x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 4\cos 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1+\sqrt{3}$ (loại) hay $\cos 2x = 1-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(1-\sqrt{3}\right) + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

i. [1D1-3] $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4$

$\Leftrightarrow 3\left(1-\cos 6x\right) - 2\cos^2 6x + 1 = 4$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 6x + 3\cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x = 0$ hay $\cos 6x = -\dfrac{3}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

j. [1D1-3] $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$

$\Leftrightarrow 5\left(1+\cos x\right) = 2 + \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 5 + 5\cos x = 2 + 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -2$ (loại) hay $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

k. [1D1-3] $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1$ hay $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ hay $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

l. [1D1-3] $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right) + 1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 2\sin^2 2x + 1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - \sin 2x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = -1$ hay $\sin 2x = \frac{5}{4}$ (loại).

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

BT 5. [1D1-3] Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0.$ b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4.$

c) $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13.$ d) $5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 9.$

e) $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x.$ f) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x + 4 = \cos x$

g) $\sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos 2x - \cos x = 2.$ h) $2\left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}\right) + 9\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1.$

i) $4\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = 7.$ j) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)$.

Lời giải

a) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0.$

Xét phương trình $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0.$

$\Leftrightarrow \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-3}{2}(l)\end{array}\right.$$

Xét $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4.$

Lời giải

Xét phương trình $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4.$.

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4 \Leftrightarrow 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+3=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1 \text{ hoặc } \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=3\,(\text{loại})$$

Với $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $4\cos^2(6x-2)+16\cos^2(1-3x)=13.$

Lời giải

Xét phương trình $4\cos^2(6x-2)+16\cos^2(1-3x)=13.$.

$$\Leftrightarrow 4\cos^2(6x-2)+8.2\cos^2(1-3x)=13 \Leftrightarrow 4\cos^2(6x-2)+8.\left[\cos 2(1-3x)+1\right]=13$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2(6x-2)+8\cos(6x-2)+8=13 \Leftrightarrow 4\cos^2(6x-2)+8\cos(6x-2)-5=0$$

$$\Leftrightarrow \cos(6x-2)=\frac{1}{2} \text{ hoặc } \cos(6x-2)=-\frac{5}{2}\,(\text{loại}).$$

Với $\cos(6x-2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(6x-2)=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x-2=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\6x-2=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x=\frac{\pi}{3}+2+k2\pi\\6x=-\frac{\pi}{3}+2+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3}\\x=-\frac{\pi}{18}+\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\pm\frac{\pi}{18}+\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) $5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-9.$

Lời giải

Xét phương trình $5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-9.$

$$\Leftrightarrow 5\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=4\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]-9\Leftrightarrow 5\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-9$$

$$\Leftrightarrow 5\left(1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-9\Leftrightarrow 10\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-14=0$$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ hoặc $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{5}$ (loại).

Với $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

e) $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x.$

Lời giải

Ta có: $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]=\cos 2x,$

$\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}-3\pi\right)=-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

Phương trình đã cho trở thành $\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-\cos 2x-\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

f) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$

Lời giải

Xét phương trình $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\right)-\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=-4 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2 \Leftrightarrow \cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-2 \Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ hoặc $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$ (loại).

Với $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

g) $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$

Lời giải

Xét phương trình $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$ biến đổi tương tự như câu f ta được:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]-1+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left[-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi \\ x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

h) $2\left(\cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1.$

Lời giải

Xét phương trình $2\left(\cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1$. ĐKXĐ. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)\Rightarrow t^2=\dfrac{4}{\cos^2 x}+\cos^2 x-4\Rightarrow t^2+4=\left(\dfrac{4}{\cos^2 x}+\cos^2 x\right)$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $2\left(t^2+4\right)+9t=1\Leftrightarrow 2t^2+9t+7=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Khi $t=1\Rightarrow\dfrac{2}{\cos x}-\cos x=1\Leftrightarrow\cos^2 x+\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow\cos x=1$ hoặc $\cos x=-2$ (loại).

Với $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$ (TM)

Khi $t=-\dfrac{7}{2}\Rightarrow\dfrac{2}{\cos x}-\cos x=-\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2 x-7\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x=4$ (loại)

Với $\cos x=-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{k2\pi;\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

i) $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=7.$

Lời giải

Xét phương trình $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=7$. ĐKXĐ. $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Đặt $t=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)\Rightarrow t^2=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}+2\Rightarrow\left(t^2-2\right)=\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Phương trình đã cho trở thành: $4\left(t^2-2\right)+4t=7\Leftrightarrow 4t^2+4t-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\ t=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$.

Khi $t=\frac{3}{2}\Rightarrow\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+2=0\left(VN\right)$

Khi $t=-\frac{5}{2}\Rightarrow\sin x+\frac{1}{\sin x}=-\frac{5}{2}$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x+2=0\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}$ hoặc $\sin x=-2$ (loại).

Với $\sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\frac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

j) $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2=2\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)$.

Lời giải

Xét phương trình $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2=2\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)$. ĐKXĐ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)\Rightarrow t^2=\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2=2t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-2\end{array}\right.$.

Khi $t=0 \Rightarrow \cos x+\dfrac{1}{\cos x}=0(VN)$

Khi $t=-2 \Rightarrow \cos x+\dfrac{1}{\cos x}=-2 \Leftrightarrow \cos^2 x+2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$ (TMĐK) .

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

BT 6. **[1D1-2]** Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x.$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5.$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}.$

d) $9-13\cos x+\dfrac{4}{1+\tan^2 x}=0.$

e) $2\tan^2 x+3=\dfrac{3}{\cos x}\cdot$

f) $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\dfrac{2}{\cos x}-\dfrac{5}{2}=0.$

g) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\cdot$

g) $2\sin^2 x+\tan^2 x=2.$

a) $\dfrac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x.$

Lời giải

Điều kiện: $x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

$\dfrac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x \Leftrightarrow 3\left(1+\tan^2 x\right)=3+2\tan^2 x.$

$\Leftrightarrow \tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}).$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5.$

Lời giải

Điều kiện $x\ne\dfrac{k\pi}{2}$.

$\dfrac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5 \Leftrightarrow \left(1+\tan^2 x\right)+\dfrac{3}{\tan^2 x}=5.$

Đặt $t=\tan^2 x \quad (t\ne 0)$, ta có phương trình: $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=\pm 1 \\ \tan x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \qquad (k\in\mathbb{Z}).$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}.$

Lời giải

Điều kiện: $x\ne k\pi$.

$\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+\cot^2 x\right)=3\cot x+\sqrt{3}.$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cot^2 x-3\cot x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=0\\ \cot x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right..$

d) $9-13\cos x+\frac{4}{1+\tan^2 x}=0.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

$9-13\cos x+\frac{4}{1+\tan^2 x}=0\Leftrightarrow 9-13\cos x+4\cos^2 x=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{9}{4}\quad (\text{ko tm})\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k2\pi.$

e) $2\tan^2 x+3=\frac{3}{\cos x}\cdot$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

$2\tan^2 x+3=\frac{3}{\cos x}\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+3=\frac{3}{\cos x}.$

Đặt $t=\frac{1}{\cos x}\quad \left(|t|\geq 1\right)$, ta có phương trình $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}(\text{ko tm})\end{array}\right..$

$\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi.\quad (k\in\mathbb{Z}).$

f) $-\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

$-\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0.$

Đặt $t=\frac{1}{\cos x}\quad \left(|t|\geq 1\right)$, ta có phương trình

$t^2-4t+4=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi.$

g) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\cdot$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Chia cả 2 vế cho $\cos x$ ta được: $\sqrt{3}\tan x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\sqrt{3}\tan x+1=1+\tan^2 x.$

$$\Leftrightarrow\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

g) $2\sin^2 x+\tan^2 x=2.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

$$2\sin^2 x+\tan^2 x=2\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)=2.$$

Đặt $t=\cos^2 x\quad(0\le t\le 1)$. Ta có phương trình $-2t^2-t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\quad(loai)\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x==\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}.$

BT 7. **[1D1-3]** Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $8\sin x\cos x-\cos 4x+3=0.$

b) $2\sin^2 8x+6\sin 4x\cos 4x=5.$

c) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=1-\sin x.$

d) $\dfrac{1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}.\sin x}{1-\cos x}=1.$

e) $\dfrac{3\sin 2x-2\sin x}{\sin 2x\cos x}=2.$

f) $\dfrac{2\sin^2 x+3\sqrt{2}\sin x-\sin 2x+1}{(\sin x+\cos x)^2}=-1.$

g) $2\cos 2x-8\cos x+7=\dfrac{1}{\cos x}\cdot$

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\dfrac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1).$

h) $3\cos 4x+2\cos^2 x+3=8\cos^6 x.$

k) $3\cos x-2=-3(1-\cos x).\cot^2 x.$

l) $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x.$

m) $2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x.$

n) $4(\sin^6 x+\cos^6 x)=4\sin 2x.$

o) $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x.$

Lời giải

a) $8\sin x\cos x-\cos 4x+3=0.$

Lời giải

Ta có: $8\sin x\cos x-\cos 4x+3=0\Leftrightarrow 4\sin 2x+2\sin^2 2x+2=0\Leftrightarrow \sin 2x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

b) $2\sin^2 8x+6\sin 4x\cos 4x=5.$

Lời giải

Ta có: $2\sin^2 8x+6\sin 4x\cos 4x=5\Leftrightarrow 2\sin^2 8x+3\sin 8x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 8x=1\left(N\right)\\ \sin 8x=-\frac{5}{2}\left(L\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 8x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

c) $\frac{\cos x}{1+\sin x}=1-\sin x.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x\neq -1\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

PT $\frac{\cos x}{1+\sin x}=1-\sin x.\Leftrightarrow \cos x=\cos^2 x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Kết hợp điều kiện, phương trình có hai họ nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

d) $\frac{1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}.\sin x}{1-\cos x}=1.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Ta có: $\frac{1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}.\sin x}{1-\cos x}=1\Leftrightarrow 1-2\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}\sin x=1-\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\left(L\right)\\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

e) $\frac{3\sin 2x-2\sin x}{\sin 2x\cos x}=2.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$(1) \Rightarrow \frac{2\sin x\left(3\cos x - 1\right)}{2\sin x\cos x\cos x} = 2$.

$\Leftrightarrow 3\cos x - 1 = 2\cos^2 x$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi \quad (l)\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$\frac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x\cos x} = 2 \quad (1)$ ĐK: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

f) $\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 = -1 - \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \left[\begin{array}{l}\sin x = -\sqrt{2}\,(VN)\\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm: $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

g) $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

PT $\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x - 8\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - 8\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 5\cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(4\cos^2 x-4\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy, phương trình có nghiệm: $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

h) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\frac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1)$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}(1+\tan^2 x)+4\left(\frac{1+\tan^2 x}{2\tan x}\right)+2-2\sqrt{3}=2(\cot x+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x+2(1+\tan^2 x)-\sqrt{3}\tan x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x+2\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$. Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có nghiệm:

$\left|\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

i) $3\cos 4x+2\cos^2 x+3=8\cos^6 x$.

Lời giải

Ta có: $3\cos 4x+2\cos^2 x+3=8\cos^6 x$

$\Leftrightarrow 3(2\cos^2 2x-1)+(1+\cos 2x)+3=(1+\cos 2x)^3$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x+1+\cos 2x=1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x$

$\Leftrightarrow \cos^3 2x-3\cos^2 2x+2\cos 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=1\\ \cos 2x=2\,(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

k) $3\cos x-2=-3(1-\cos x).\cot^2 x$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi (k\in\mathbb{Z})$.

PT $\Leftrightarrow 3\cos x.\sin^2 x-2\sin^2 x+3(1-\cos x)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos x.(1-\cos^2 x)-2(1-\cos^2 x)+3(1-\cos x)\cos^2 x=0$

$$\Leftrightarrow 6\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{2}{3} \\ \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm arc\cos\left(-\frac{2}{3}\right) + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm arc\cos\left(-\frac{2}{3}\right) + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

l) $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x.$

Lời giải

PT $\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 2x = 1 - \sin x + \sin 3x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

m) $2\cos 5x.\cos 3x + \sin x = \cos 8x.$

Lời giải

Ta có: $2\cos 5x.\cos 3x + \sin x = \cos 8x \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 8x + \sin x = \cos 8x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\,(k \in \mathbb{R}) \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}.$$

n) $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\sin 2x.$

Lời giải

Ta có: $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\sin 2x \Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{2}{3}\\ \sin 2x=-2\left(vn\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=arc\sin\left(\frac{2}{3}\right)+k2\pi\\ 2x=\pi-arc\sin\left(\frac{2}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+k\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

o) $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x.$

Lời giải

PT $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x.$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x+2=2\cos 2x.\cos x+4\sin x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x.\cos 2x+1=\cos 2x.\cos x+2\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x\left(2\sin x-1\right)+1-2\sin x=0 \Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos 2x.\cos x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos 2x.\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \left(2\cos^2 x-1\right).\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ 2\cos^3 x-\cos x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ 2\cos^3 x-\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).\\ x=k2\pi\end{array}\right.$$

BT 8. **[1D1-3]** Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}.$

b) $3\tan 2x-\frac{3}{\cos 2x}-\frac{2\tan x-2}{1+\tan x}+4\cos^2 x=2.$

c) $(2\tan^2 x-1)\cos x=2-\cos 2x.$

d) $2\cos^2 x+3\cos x-2\cos 3x=4\sin x\sin 2x.$

e) $4\sin x+3=2(1-\sin x)\tan^2 x.$

f) $2\sin^3 x-3=(3\sin^2 x+2\sin x-3)\tan x.$

g) $5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2.$

h) $\frac{3\sin^2 x+2\sin x-3}{\cot x}+3=2\sin^3 x.$

i) $5\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}=3+\cos 2x.$

k) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\tan x-2\sqrt{3}=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right).$

Lời giải

a) $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ (1). Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Khi đó pt (1) $\Leftrightarrow \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \cos^3 x - 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 x - \cos^3 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{k2\pi}{3}\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm: $x = \dfrac{k2\pi}{3}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) $3\tan 2x - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\tan x - 2}{1 + \tan x} + 4\cos^2 x = 2.$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$3\tan 2x - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\tan x - 2}{1 + \tan x} + 4\cos^2 x = 2$ (1).

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}.$

Khi đó pt (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3\sin 2x}{\cos 2x} - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\left(\sin x - \cos x\right)}{\sin x + \cos x} + 2\cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 3 - 2\left(\sin x - \cos x\right)^2 + 2\cos^2 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 3 - 2 + 2\sin 2x + 2\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = \dfrac{3}{2}\left(VN\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

c) $(2\tan^2 x - 1)\cos x = 2 - \cos 2x.$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$(2\tan^2 x-1)\cos x=2-\cos 2x \Leftrightarrow (2\tan^2 x-1)\cos x=3-2\cos^2 x$ (1).

Khi đó pt(1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\cos^2 x=3\cos x-2\cos^3 x \Leftrightarrow 2\cos^3 x-3\cos^2 x-3\cos x+2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=2\,(VN)\\ \cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm: $x=\pi+k2\pi$ và $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

d) $2\cos^2 x+3\cos x-2\cos 3x=4\sin x\sin 2x.$

Lời giải

$2\cos^2 x+3\cos x-2\cos 3x=4\sin x\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2\left(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\right)=4\sin x\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2\left(\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$.

e) $4\sin x+3=2(1-\sin x)\tan^2 x.$

Lời giải

$4\sin x+3=2(1-\sin x)\tan^2 x \Leftrightarrow 4\sin x+3=2(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$ (1).

Điều kiện: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(4\sin x+3\right)\left(1+\sin x\right)=2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x+7\sin x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \sin x=-3\,(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$.

f) $2\sin^3 x-3=(3\sin^2 x+2\sin x-3)\tan x.$

Lời giải

Ta có: $2\sin^3 x-3=\left(2\sin x-3\cos^2 x\right)\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x\cos x-3\cos x=2\sin^2 x-3\cos^2 x\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x\cos x-1\right)=-3\cos x\left(\sin x\cos x-1\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\cos x-1=0\\ 2\sin^2 x=-3\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=2\\ 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=2\\ \cos x=2\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$.

g) $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2\Leftrightarrow 5\cos x-3\left(1-\cos x\right)\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=2$

$\Leftrightarrow 5\cos x\left(1+\cos x\right)-3\cos^2 x=2\left(1+\cos x\right)\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

h) $\dfrac{3\sin^2 x+2\sin x-3}{\cot x}+3=2\sin^3 x.$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

$\dfrac{3\sin^2 x+2\sin x-3}{\cot x}+3=2\sin^3 x\Leftrightarrow 2\sin^3 x-3=\left(2\sin x-3\cos^2 x\right)\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x\cos x-3\cos x=2\sin^2 x-3\cos^2 x\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x\cos x-1\right)=-3\cos x\left(\sin x\cos x-1\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\cos x-1=0\\ 2\sin^2 x=-3\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=2\\ 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=2\\ \cos x=2\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$.

i) $5\left(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x.$

Lời giải

Điều kiện: $1+\sin 2x\neq 0$

$$\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}=\frac{4\cos^3 x-3\cos x+3\sin x-4\sin^3 x}{1+4\sin x\cos x}$$
$$=\frac{4(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)-3(\cos x-\sin x)}{1+4\sin x\cos x}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1+4\sin x\cos x)}{1+4\sin x\cos x}=\cos x-\sin x$$

Ta có: $5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x \Leftrightarrow 5\cos x=3+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=2\ (l)\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

+ Với $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$. (thỏa mãn điều kiện).

k) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\tan x-2\sqrt{3}=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x\neq 0;\cos\frac{x}{2}\neq 0$

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\tan x-2\sqrt{3}=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x-2\sqrt{3}=\sin x\left(\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x-2\sqrt{3}=\tan x \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^2 x-2\tan x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right..$$

2. *Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sin và cosin (phương trình cổ điển)*

Dạng tổng quát: $\boxed{a\sin x+b\cos x=c}$ $(*)$, $\left(a,\ b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)$.

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2+b^2\geq c^2$, (kiểm tra trước khi giải)

Phương pháp giải:

- Chia 2 vế $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$, thì $(*)\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(**)$

- Giả sử: $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\left(\alpha \in [0;2\pi]\right)$ thì:

$(**) \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$: dạng cơ bản.

Lưu ý. Hai công thức sử dụng nhiều nhất là: $\begin{cases} \sin a\cdot\boxed{\cos b} \pm \cos a\cdot\sin b = \sin(a\pm b) \\ \cos a\cdot\boxed{\cos b} \pm \sin a\cdot\sin b = \cos(a\mp b) \end{cases}$.

Các dạng có cách giải tương tự:

$\left[\begin{array}{l} \circ\ a.\sin mx + b.\cos mx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2}\cos nx \\ \sqrt{a^2+b^2}\sin nx \end{array}\right.,\ (a^2+b^2\neq 0) \\ \circ\ a.\sin mx + b.\cos mx = c.\sin nx + d.\cos nx,\ (a^2+b^2 = c^2+d^2) \end{array}\right. \xrightarrow{PP}$ Chia : $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$.

Giải:

Vì $1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 > \left(-\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình luôn có nghiệm

Khi đó: pt $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

Giải:

$$\text{pt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x)$.

Giải:

$$\text{pt} \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = \sqrt{3}\cos x + \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{3}=-x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG 2

BT 9. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

c) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{\pi}{3}-x=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}-k2\pi \\ x=-\frac{5\pi}{12}-k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

e) $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{11\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

f) $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\frac{1}{2}\cos 7x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos 7x-\sin\frac{\pi}{3}.\sin 7x=\cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \cos\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ 7x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ 7x=-\frac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

g) $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=2.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\cos x-\sin\frac{\pi}{6}.\sin x=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin(\pi-2x)=1.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}.\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=k2\pi \\ 2x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

h) $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{6}.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

k) $4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x=3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

l) $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2$

$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

m) $\sqrt{3}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

n) $\sin x(\sin x-1)=\cos x(1-\cos x) \Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x=\cos x-\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

o) $\sin x(\sqrt{3}-\sin x)=\cos x(1+\cos x) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\sin^2 x=\cos x+\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

p) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

q) $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\frac{1}{2}(\cos 12x+\cos 2x)-\sqrt{3}\sin 2x=1+\frac{1}{2}(\cos 12x-\cos 2x)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3}+2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3}+2x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

r) $\cos x\sin 3x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\cos 3x\sin x$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\dfrac{1}{2}\left(\sin 4x+\sin 2x\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\left(\sin 4x-\sin 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

s) $2(\cos^4 x-\sin^4 x)+1=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+1=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+\sin x\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \\ \sqrt{3}\cos x-\sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right). \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$$

t) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=2\cos x-1$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

u) $2\sin^2 x+\sin 2x-3\sin x+\cos x=2$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $2\sin^2 x-3\sin x-2+2\sin x\cos x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-2)(2\sin x+1)+\cos x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x+\cos x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x+1=0 \\ \sin x+\cos x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

v) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x=1$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+4\sin x=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+1-2\sin^2 x+4\sin x=1$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sqrt{3}\cos x-2\sin x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ 2\sqrt{3}\cos x-2\sin x+4=0 \end{array}\right.$

☑ $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

☑ $2\sqrt{3}\cos x-2\sin x+4=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=-1$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+x=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm $x=k\pi$ và $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

x) $\cos x-2\cos 2x=2\sin x\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\cos x-2\cos 2x=2\sin x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x\cos 2x-\sin x\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x\cos 2x-2\sin^2 x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(1-2\sin^2 x\right)-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos x-2+\sqrt{3}\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x-2+\sqrt{3}\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

BT 10. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\frac{\pi}{12}$

Phương trình tương đương với: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{12}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

b) $\cos x=\sqrt{2}\sin 2x-\sin x.$

Phương trình tương đương với: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 2x\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=2x+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}-k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c) $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x.$

Phương trình tương đương với: $\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cos x.$

Phương trình tương đương với: $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x=\pi-x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

e) $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0.$

Phương trình tương đương với: $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=-\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-3x)$

f) $(\sin x+\cos x)^2-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos x$

Phương trình tương đương với: $1+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\mathrm{x}=\mathrm{cosx} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-2x+k2\pi=x \\ \frac{\pi}{3}-2x+k2\pi=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

g) $\sqrt{2}\cos 2x+\sin x-\cos x=0.$

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x-\sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2\mathrm{x}=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos 2\mathrm{x}=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x=-x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

g) $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x-2\sin x=0.$

Phương trình đã cho tương đương với: $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\frac{\pi}{3}=x+k2\pi \\ 3x+\frac{\pi}{3}=\pi-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$

h) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

Phương trình tương đương với : $\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+x+k2\pi (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

k) $2\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin 3x.$

Phương trình tương đương với : $1+\cos x+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin 3x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 3x=\frac{5\pi}{6}-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

l) $\sin x-\sqrt{3}\cos x+2=4\cos^2 x$

Phương trình tương đương với : $\sin x-\sqrt{3}\cos x=4\cos^2 x-2$

$$\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(2\cos^2 x-1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{5\pi}{6}-x+k2\pi \\ 2x=-\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

m) $4\sin^2 x+\sin x=2-\sqrt{3}\cos x$

Phương trình tương đương với : $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2-4\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(1-2\sin^2 x\right) \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

n) $2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right) = 1$

Phương trình tương đương với : $2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 - 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x \quad \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

o) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 4\sin 3x.\cos x + 2$

Phương trình tương đương với : $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\left(1 - \sin^2 x\right) = 4\sin 3x.\cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4\sin 3x.\cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x - 4\sin 3x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x - 2\sin 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2\sin 3x = 0 \end{array}\right.$$

Xét TH 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Xét TH 2: $\sqrt{3}\sin x - \cos x - 2\sin 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = -x + \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right) \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$

p) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x.\cos 2x = \sin x$

Phương trình tương đương với : $\sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x-\sin x=\sin x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=2\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x-\frac{1}{2}\sin 5x=\sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}-5x+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+5x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

q) $2(\cos 6x+\cos 4x)-\sqrt{3}(1+\cos 2x)=\sin 2x.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $4\cos 5x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x=2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos 5x-\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \ \ (1) \\ \sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin 5x \ (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$(2)\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 5x=\pi-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

r) $\sqrt{3}\sin 7x-2\sin 4x\sin 3x=\cos x.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\sqrt{3}\sin 7x+\left(\cos 7x-\cos x\right)=\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 7x+\cos 7x=2\cos x \Leftrightarrow \cos\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{3}=x+k2\pi \\ 7x-\frac{\pi}{3}=-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

s) $2\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sin x+\sqrt{3}\cos 3x.$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $2\sin x(1-2\sin^2 x)=\sin x+\sqrt{3}\cos 3x.$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x)=\sin x+\sqrt{3}\cos 3x.$

t) $\sin^2 x+\dfrac{\sin 2x}{2}=\sqrt{2}\sin x\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\sin^2 x+\dfrac{\sin 2x}{2}=\sqrt{2}\sin x\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \sin x=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{8}+k\pi\\ x=\dfrac{3}{16}\pi+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

u) $\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\cos 2x}{2}=\sin^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right).$

Phương trình tương đương với: $2\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\cos 2x}{2}=1+\sin^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos 2x=2-\cos\left(2x-\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos 2x=2+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=-2\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{-7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

v) $2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x.$

Phương trình tương đương với: $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\left(2\cos^2 3x-1\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 6x \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-6x+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+6x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{48}+k\frac{\pi}{4} \\ x=-\frac{5\pi}{24}-k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

x) $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$

Phương trình tương đương với: $2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=2\sqrt{2(1+\cos 2x)}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=2\sqrt{4\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=4\left|\cos x\right|(*)$$

Trường hợp 1: $\cos x\ge 0$

$$(*)\Leftrightarrow \cos x\left(2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$$

Vì $\cos x\ge 0$ nên loại nghiệm: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Trường hợp 2: $\cos x<0$

$$(*)\Leftrightarrow \cos x\left(2\sqrt{3}\sin x-2\cos x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=-2 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Vì: $\cos x<0$ nên loại nghiệm $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Kết luận: Phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

BT 11. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x+\cos x=\cos 2x-\sin x.$

Lời giải

Cách 1:

$\sin 2x + \cos x = \cos 2x - \sin x \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = -\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-x - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 2:

$\sin 2x + \cos x = \cos 2x - \sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \cos x = 2\cos^2 x - 1 - \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sin x = 2\cos^2 x - \cos x - 1$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = (\cos x - 1)(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin x - \cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin x - \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$

Lời giải

Cách 1:

$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x\sin\frac{\pi}{3} = \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{k2\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Cách 2:

$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin x+\cos x \ \ \cos 2x-\cos x=\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x$

Lời giải

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-1\right)\left(2\cos x+1\right)=\sqrt{3}\sin x\left(2\cos x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x+1\right)\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c) $\sqrt{3}(\cos 2x+\sin 3x)=\sin 2x+\cos 3x.$

Lời giải

$$\Leftrightarrow \cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 3x\sin\frac{\pi}{3}=\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\dfrac{\pi}{3}=2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 3x+\dfrac{\pi}{3}=-2x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 5x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

d) $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x).$

Lời giải

$$\Leftrightarrow \cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 7x\sin\frac{\pi}{3}=\cos 5x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 5x\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{3}=5x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 7x-\frac{\pi}{3}=-5x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 12x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

e) $\sin 2x+2\cos^2 x+\sin x-\cos x=1.$

Lời giải

$\sin 2x+2\cos^2 x+\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \sin 2x+2\cos^2 x-1=\cos x-\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=\cos x-\sin x \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-x+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

f) $4\sin^2 x+\tan x+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=1.$

Điều kiện $\cos x\neq 0.$

$4\sin^2 x+\tan x+\sqrt{2}\left(1+\tan x\right)\sin 3x=1.$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\sin^2 x-1\right)+\left(\tan x+1\right)+\sqrt{2}\left(1+\tan x\right)\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)+\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{2}\sin 3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[2\cos x\left(\sin x-\cos x\right)+\left(1+\sqrt{2}\sin 3x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \quad (1) \\ 2\cos x\left(\sin x-\cos x\right)+\left(1+\sqrt{2}\sin 3x\right)=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (thoả điều kiện)

$(2)\Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=-\sqrt{2}\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-3x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=-3x+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi+3x+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=-\frac{5\pi}{4}-k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).\text{(thoả điều kiện)}$$

g) $\dfrac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}.$

Điều kiện $\cos x-\cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\neq -1 \\ \cos x\neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}. \Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\frac{3x}{2}=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=-\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}.\ \text{(thoả điều kiện)}$$

g) $\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}=\dfrac{1-\sin x}{\sqrt{3}\cos x}.$

Điều kiện $\begin{cases} 1+2\sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}.$

Với điều kiện trên phuowg trình trở thành.

$$\sqrt{3}\cos x(1-2\sin x)=(1-\sin x)(1+2\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin x-2\sin^2 x \Leftrightarrow -\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-x=2x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \frac{\pi}{3}-x=\pi-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}-\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

So với điều kiện phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

h) $\dfrac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}.$

Lời giải

Điều kiện $2\cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq -1 \end{cases}$.

Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$$\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - \sin x - 1\right) \Leftrightarrow \cos x\left(1 - 2\sin x\right) = \sqrt{3}\left(1 - 2\sin x\right)\left(\sin x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3}\left(\sin x + 1\right) \text{ (do } \sin x \neq \frac{1}{2}\text{)} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện phương trình có nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

k) $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \sqrt{3}.$

Lời giải

Điều kiện $\cos x - \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình trở thành

$$\frac{2\sin x.\cos 2x}{-2\sin 2x.\sin x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

l) $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$

Lời giải

Điều kiện: $(1 + 2\sin x)(1 - \sin x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình trở thành

$$\cos x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\left(1 + 2\sin x\right)\left(1 - \sin x\right) \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\left(-2\sin^2 x + \sin x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}-x=2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{\pi}{6}-x=\pi-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

m) $4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos 2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1.$

$$4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos 2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1. \Leftrightarrow 2\left(1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)+2 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ (l) \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ (n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3}=arc\cos\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=-arc\cos\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}arc\cos\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}arc\cos\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

n) $\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x=1.$

Lời giải

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

o) $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1.$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{2\pi}{3}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

p) $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0.$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sqrt{3}\sin x + 2\sin x.\cos x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2x = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} + 2x = \pi - x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

q) $\cos 2x\left(1 + \tan x\tan\frac{x}{2}\right) + \tan x = 2\sin x + 1.$

Lời giải

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x\left(1 + \tan x\tan\frac{x}{2}\right) + \tan x = 2\sin x + 1 \Leftrightarrow \cos 2x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2x.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x + 1 \Leftrightarrow \cos 2x.\cos x + 2\cos 2x.\sin^2\frac{x}{2} + \sin x = 2\sin x.\cos x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x + 2\cos 2x.\frac{1 - \cos x}{2} + \sin x = 2\sin x.\cos x + \cos x$$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \cos x - \sin x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{4} = x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{4} = -x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện, ta được $x = k2\pi, x = \frac{-\pi}{6}+k2\pi,\ x = \frac{7\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

BT 12. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2\cos x.$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x\cos x + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x + 1\right) = 0$

☑ Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

☑ Với $\sqrt{3}\cos x - \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}+x = \frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6}+x = -\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm là $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$

b) $\sqrt{3}\sin 2x - 1 = \cos 2x - 2\cos x.$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 2\cos^2 x - 1 - 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

☑ Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

☑ Với $\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z} \\ x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ x=k2\pi\end{array}\right.$

c) $\sin 2x-\cos x+\sin x=1.$

$\Leftrightarrow 1-\sin 2x=\sin x-\cos x$

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow t^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$

Vậy ta có $t^2=t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1\end{array}\right.$

☑ Với $t=0\Rightarrow 1-\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

☑ Với $t=1\Rightarrow 1-\sin 2x=1\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

d) $\cos 2x+2\sin x=1+\sqrt{3}\sin 2x.$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+2\sin x=1+2\sqrt{3}\sin x\cos x\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0\end{array}\right.$

☑ Với $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

☑ Với $\sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ \frac{\pi}{3}+x=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

e) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1.$

Phương trình tương đương với : $\sqrt{3}\text{sin}2x-\left(1-2\text{sin}^2x\right)=4\text{sin}x-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\text{sin}2x+2\text{sin}^2x-4\text{sin}x=0 \Leftrightarrow 2\text{sin}x\left(\sqrt{3}\text{cos}x+\text{sin}x-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\text{cos}x+\text{sin}x=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{sin}x=0\\ \frac{1}{2}\text{sin}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cos}x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{sin}x=0\\ \text{sin}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=k\pi,x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

f) $2\sin 6x-2\sin 4x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\sin 2x.$

$$4\text{cos}5x\text{sin}x+\sqrt{3}\left(1-2\text{sin}^2x\right)=\sqrt{3}+2\text{sin}x\text{cos}x$$

$$\Leftrightarrow 2\text{sin}x\left(2\text{cos}5x-\sqrt{3}\text{sin}x-\text{cos}x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{sin}x=0\\ 2\text{cos}5x=\sqrt{3}\text{sin}x+\text{cos}x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{sin}x=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sin}x+\frac{1}{2}\text{cos}x=\text{cos}5x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{sin}x=0\\ \text{cos}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\text{cos}5x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=5x+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=-5x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}-k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=k\pi,x=-\frac{\pi}{12}-k\frac{\pi}{2},\text{x}=\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

g) $\tan\frac{\pi}{7}\cdot\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=2.$

phương trình tương đương với : $\tan\frac{\pi}{7}\cdot\sin x+1+\cos x=2 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{7}\sin x+\cos x=1$

$$\Leftrightarrow \sin x\sin\frac{\pi}{7}+\cos x\cos\frac{\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{7}=\frac{\pi}{7}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{7}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{7}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=\frac{2\pi}{7}+k2\pi, x=k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

g) $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x=1+\sin x+\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x=2\sin x\cos x+2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 2x-\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \cos x\left[\cos^2 x-\sin^2 x-(\sin x+\cos x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x+\cos x=0 \\ \sin x-\cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \tan x=-1 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$$

h) $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

Cách 1:

$\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 4(1-\cos 2x)\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 4\cos x-4\cos 2x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 4\cos x-2(\cos 3x+\cos x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Cách 2: Nhân 2 vế (h) cho $\sin x$ ta được:

$\Leftrightarrow 8.\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \sqrt{3}\,\mathrm{t}\,\mathrm{anx} + 1$ ($\rightarrow$ đưa về phương trình bậc 3 theo $t = \tan x$)

k) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}.$

Lời giải

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$

3. *Phương trình lượng giác đẳng cấp (bậc 2, bậc 3, bậc 4)*

Dạng tổng quát: $\boxed{a.\sin^2 X + b.\sin X\cos X + c.\cos^2 X = d}$ (1) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dấu hiệu nhận dạng: Đ ng bậc hoặc lệch nhau hai bậc của hàm sin hoặc cosin (tan và cotan được xem là bậc 0).

Phương pháp giải:

- Bước 1. Kiểm tra $X = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X = 0 \\ \sin^2 X = 1 \end{cases}$ có phải là nghiệm hay không ?
- Bước 2. Khi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X \neq 0 \\ \sin^2 X \neq 1 \end{cases}$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 X$:

$$(1) \Leftrightarrow a\frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} + b\frac{\sin X\cos X}{\cos^2 X} + c\frac{\cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{d}{\cos^2 X}$$

$$\Leftrightarrow a\tan^2 X + b\tan X + c = d(1 + \tan^2 X)$$

- Bước 3. Đặt $t = \tan X$ để đưa về phương trình bậc hai theo ẩn $t \Rightarrow x$.

Lưu ý. Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sin 2x - 4\sin^2 x = 1$.

Giải:

pt $\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 4\sin^2 x = 1$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$, phương trình trở thành $-4.1 = 1$ (vô lí)

Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$2 + 4\tan x - 4\tan^2 x = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x$.

Giải:

pt $\Leftrightarrow 4\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - 3\sin x + 3\cos^3 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$4.1 - 3.1 = 0$ (vô lí); hoặc $4.(-1)^3 - 3.(-1) = 0$ (vô lí)

Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$$4\tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+3=0 \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sin^2 x(\tan x+1) = 3\sin x(\cos x - \sin x)+3$.

Giải:

Điều kiện $\cos x \neq 0$

☑ Dễ thấy $\sin x = 0$ không là nghiệm của phương trình

☑ Chia hai vế phương trình cho $\sin^2 x$ ta được

$$1+\tan x = 3\left(\cot x - 1\right)+3\left(1+\cot^2 x\right)=0 \Leftrightarrow 3\cot x\left(\cot x - 1\right)+3\cot x\left(1+\cot^2 x\right) = \cot x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3\cot^3 x + 3\cot^2 x - \left(\cot x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\cot x + 1\right)\left(3\cot^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = -1 \\ \cot x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG 3

BT 13. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$

b) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$

c) $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x.$

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x.$

e) $\sqrt{3}\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}.$

f) $2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1 = 0.$

g) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0.$

h) $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \dfrac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x.$

BT 14. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = 2\cos^3 x.$

b) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x.$

c) $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0.$

d) $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x.$

e) $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x.$

f) $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x\sin^2 x.$

g) $3\cos^4 x+\sin^4 x=4\sin^2 x\cos^2 x.$ h) $4\sin^3 x+3(\cos^3 x-\sin x)=\sin^2 x\cos x.$

i) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x=\sin x.$ j) $\sin^2 x+\frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x.$

k) $\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0.$ l) $\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x\cos x).$

m) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$

n) $4\sin^4 x+4\cos^4 x+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=6.$ o) $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x.$

GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG 3

BT 13.

a) $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=2.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $2=2$ (đúng)

Suy ra $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm phương trình.

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\tan^2 x+3\sqrt{3}\tan x-1=2\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy, nghiệm phương trình là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

b) $\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $1=0$ (vô lí)

Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$\tan^2 x+\tan x-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(-2\right)+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

c) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x.$

pt $\Leftrightarrow\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x=1$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1\Leftrightarrow\sin x=\pm 1$, phương trình trở thành

$-1=1$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$1-2\sqrt{3}\tan x-\tan^2 x=1+\tan^2 x \Leftrightarrow 2\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

d) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\sin 2x+4=4\sin^2 x. \Leftrightarrow \cos^2 x-3\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=-2.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $-2=-2$ (đúng)

Suy ra $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm phương trình.

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$1-3\sqrt{3}\tan x-2\tan^2 x=-2\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

e) $\sqrt{3}\sin^2 x+(1-\sqrt{3})\sin x\cos x-\cos^2 x+1=\sqrt{3}.$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2 x+(1-\sqrt{3})\sin x\cos x-\cos^2 x=-1+\sqrt{3}.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $\sqrt{3}=-1+\sqrt{3}$ (vô lý)

Suy ra $\cos x\neq 0$.

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$\sqrt{3}\tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-1=\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \tan x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

f) $2\sin^2 x+(3+\sqrt{3})\sin x\cos x+(\sqrt{3}-1)\cos^2 x=-1.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $2=-1$ (vô lý)

Suy ra $\cos x\neq 0$.

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$2\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\left(\sqrt{3}-1\right)=-\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow 3\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

g) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0.$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$, phương trình trở thành $4 = 0$ (vô lý)

Suy ra $\cos x \neq 0$.

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4\tan^2 x - 5\tan x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2 \\ \tan x = -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

h) $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x.$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x - \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x - \sin^2 2x = 1$$

☑ Xét $\cos 2x = 0$ thì $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1$, phương trình trở thành

$-1 = 1$ (vô lí); Suy ra $\cos 2x \neq 0$

☑ Xét $\cos 2x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 2x$ ta được

$$1 - 2\sqrt{3}\tan 2x - \tan^2 2x = \left(1 + \tan^2 2x\right) \Leftrightarrow 2\tan^2 2x + 2\sqrt{3}\tan 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 0 \\ \tan 2x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

BT 14.

a) $\sin x = 2\cos^3 x.$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành $\pm 1 = 0$ (vô lý)

Suy ra $\cos x \neq 0$.

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$$\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 2 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x.$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x = \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \cos x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos^2 x - \cos x.\sin^2 x - 2\cos^3 x = 0$$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x.\cos x-\sin^2 x-2\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\ (1)\\ \sin x.\cos x-\sin^2 x-2\cos^2 x=0\ (2)\end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

(2) $\Leftrightarrow -\tan^2 x+\tan x-2=0$ (vô nghiệm)

Vậy, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0.$

pt $\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-4\sin^3 x+\cos x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow -3\sin^3 x+\sin x.\cos^2 x+\cos x.\sin^2 x+\cos^3 x=0$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm1$, phương trình trở thành

$\pm3=0$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$-3\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

d) $4(\sin^3 x+\cos^3 x)=\cos x+3\sin x.$

pt $\Leftrightarrow 4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\cos x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+3\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin^2 x.\cos x-3\sin x.\cos^2 x+3\cos^3 x=0$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm1$, phương trình trở thành

$\pm1=0$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$\tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

e) $6\sin x+2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x.$

pt $\Leftrightarrow 6\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2\cos^3 x-10\sin x.\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 6\sin^3 x - 4\sin x.\cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 6 = 0$ (vô lí); Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$6\tan^3 x - 4\tan x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x.$

pt $\Leftrightarrow \cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 3\cos x.\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow -3\sin^3 x - 3\sin^2 x.\cos x + \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 3 = 0$ (vô lí); Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$-3\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

g) $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\sin^2 x \cos^2 x.$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$1 = 0$ (vô lí); Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^4 x$ ta được

$\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

h) $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x.$

pt $\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x \cos^2 x - \sin^2 x \cos x + 3\cos^3 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 1 = 0$ (vô lí); Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$\tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

i) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x.$

pt $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^3 - 3\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì phương trình đúng

Suy ra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm.

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$2\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(Lưu ý: bài này cũng có thể đặt $\cos^2 x$ làm nhân tử chung)

j) $\sin^2 x + \frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x.$

Đk : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

pt $\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{\cos^3 x}{\sin x} - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x + \cos^3 x - 2\sin x\cos^2 x = 0$

☑ Xét $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 3 = 0$ (vô lí); Suy ra $\cos x \neq 0$

☑ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$3\tan^3 x - 2\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. So với đk, ta nhận nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

k) $\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0.$

Đk: $\cos 4x\neq 0$

☑ Xét $\cos x=0$ thì phương trình trở thành

$1=0$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$\text{pt}\Leftrightarrow \tan^2 4x+\left(\tan x+1\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\tan x=-1\\ \tan 4x=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{k\pi}{4}\end{cases},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. So với đk, ta nhận nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

l) $\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x\cos x).$

Đk : $\cos x\neq 0$

$$\text{pt}\Leftrightarrow \sin^3 x-2\sin^2 x\cos x-6\cos^3 x+3\cos x-3\sin x\cos^2 x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x+\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x=0$$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 1=0$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$$\tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$. So với đk, ta nhận tất cả nghiệm.

m) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$

☑ Xét $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm 1$, phương trình trở thành

$\pm 1=0$ (vô lí); Suy ra $\cos x\neq 0$

☑ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$$\tan^3 x+\sqrt{3}\tan^2 x-\tan x-\sqrt{3}=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\pm 1\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

n) $4\sin^4 x+4\cos^4 x+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=6.$

pt $\Leftrightarrow -2\sin^2 2x+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=2$

☑ Xét $\cos 2x=0$ thì $\sin^2 2x=1\Leftrightarrow \sin 2x=\pm 1$, phương trình trở thành

$-2=2$ (vô lí); Suy ra $\cos 2x\neq 0$

☑ Xét $\cos 2x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 2x$ ta được

$-2\tan^2 2x+5\tan 2x+1=2\left(1+\tan^2 2x\right) \Leftrightarrow -4\tan^2 2x+5\tan 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{1}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

o) $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x.$

Đk: $\sin x\neq 0$

pt $\Leftrightarrow 3\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^4 x-\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x.\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos x\left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)+2\sin^2 x\left(\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x=0\\ 3\cos x-2\sin^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos^2 x=0\\ 3\cos x-2+2\cos^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$ So với đk, ta nhận tất cả nghiệm.

4. Phương trình lượng giác đối xứng

① **Dạng 1.** $a\cdot(\sin x\pm\cos x)+b\cdot\sin x\cos x+c=0$ **(dạng tổng/hiệu – tích)**

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x+\cos x,\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=\cdots$ và viết $\sin x\cos x$ theo t.

Lưu ý, khi đặt $t=|\sin x\pm\cos x|$ thì điều kiện là: $0\le t\le\sqrt{2}$.

② **Dạng 2.** $a\cdot(\tan^2x+\cot^2x)+b\cdot(\tan x\pm\cot x)+c=0$

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\tan x\pm\cot x,\ |t|\ge 2\Rightarrow t^2=\cdots$ và biểu diễn $\tan^2x+\cot^2x$ theo t và lúc này thường sử dụng: $\tan x\cot x=1,\ \tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}\cdot$

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin 2x+(2-\sqrt{2})(\sin x+\cos x)+1-2\sqrt{2}=0.$

Giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right);\ |t|\le\sqrt{2}$

Ta có: $t^2=(\sin x+\cos x)^2\Leftrightarrow\sin 2x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $t^2-1+\left(2-\sqrt{2}\right)t+1-2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t^2+\left(2-\sqrt{2}\right)t-2\sqrt{2}=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-2\end{array}\right.$

☑ Với $t=\sqrt{2}$ thì $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

☑ Với $t=-2$ thì $|-2|\le\sqrt{2}$ vô lí

Ví dụ 2. Giải phương trình: $2\tan^2x+2\cot^2x-(4-\sqrt{2})(\tan x+\cot x)+4+2\sqrt{2}=0.$

Giải:

Điều kiện $\sin 2x\ne 0$

Đặt $t=\tan x+\cot x$

Ta có: $t^2=(\tan x+\cot x)^2\Leftrightarrow\tan^2x+\cot^2x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $2\left(t^2-2\right)-\left(4-\sqrt{2}\right)t+4+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2t^2-\left(4-\sqrt{2}\right)t+2\sqrt{2}=0$

Phương trình vô nghiệm

BÀI TẬP VẬN DỤNG 4

BT 15. Giải các phương trình lượng giác:

a) $\sin 2x-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=5$

Giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Phương trình trở thành : $t^2-1-2\sqrt{2}t=5\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\sqrt{2}\\ t=3\sqrt{2}(\text{L})\end{array}\right.$

Với $t=-\sqrt{2}$: $\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{-3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

b) $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x=2.$

Giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow 2\sin x\cos x=t^2-1$

Phương trình trở thành : $2t+3\left(t^2-1\right)=2\Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{-5}{3}(\text{L})\end{array}\right.$

Với $t=1$: $\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

c) $(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=1.$

Giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$

Phương trình trở thành : $t+\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\ (\text{L})\end{array}\right.$

Với $t=1$ $\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

d) $\left(1+\sqrt{2}\right)(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$

Giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow 2\sin x\cos x=1-t^2.$

Phương trình trở thành : $\left(1+\sqrt{2}\right)t+\left(1-t^2\right)=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{2}\right)t+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

Với $t=\sqrt{2}:\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

e) $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x.$

Giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2.$

Phương trình trở thành : $2\sqrt{2}t=3-\left(1-t^2\right)\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+2=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

Với $t=\sqrt{2}:\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

f) $\left(1-\sqrt{2}\right)(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x.$

Giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2.$

Phương trình trở thành : $\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)t=\left(1-t^2\right)\Leftrightarrow t^2+\left(1-\sqrt{2}\right)t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-1\end{array}\right.$

Với $t=\sqrt{2}:\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Với $t=-1$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{-\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3}{2}\pi+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

g) $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-2\sin 2x=1$

Giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình trở thành : $2\sqrt{2}t-2(1-t^2)=1 \Leftrightarrow 2t^2+2\sqrt{2}t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t=\frac{-3\sqrt{2}}{2}\text{ (L)} \end{array}\right.$

Với $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

h) $(\sin x-\cos x)=2\sqrt{2}\sin x\cos x$

Giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x=1-t^2$.

Phương trình trở thành : $t-\sqrt{2}(1-t^2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Với $t=-\sqrt{2}$:

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

i) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(1-\sin 2x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\left(1-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

j) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}.$ Điều kiện: $\sin 2x\neq 0.$

Ta có: $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x.\cos x}=2\sqrt{2} \Rightarrow \sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x.\cos x$. (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x=t^2-1$

Phương trình (1) trở thành : $t=\sqrt{2}\left(t^2-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Với $t=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (t/m)

Với $t=\frac{-\sqrt{2}}{2}$:

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-5\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}. \text{ (t/m)}$$

k) $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$ Điều kiện: $\sin 2x\neq 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\cos x}{\sin x.\cos x}=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Đặt $t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\left|t\right|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)$.

Phương trình trở thành : $\frac{2t}{\left(1-t^2\right)}=-2t\Leftrightarrow 2t.\left(\frac{1}{1-t^2}+1\right)=0\Leftrightarrow \frac{2t.\left(2-t^2\right)}{1-t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=-\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Rightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. (Đ)

Với $t=\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pi+k2\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. (Đ)

Với $t=0\Rightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. (Đ)

l) $2\sin 2x+8=3\sqrt{6}\left|\sin x+\cos x\right|$.

Giải:

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|$ điều kiện $0\le t\le\sqrt{2}$

Ta có : $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $2\left(t^2-1\right)+8=3\sqrt{6}t\Leftrightarrow 2t^2-3\sqrt{6}t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ t=\sqrt{6}(L)\end{array}\right.$

Với $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ thì $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pm\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

m) $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$.

Giải

Đặt $t=\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ điều kiện $0\le t\le\sqrt{2}$

Ta có : $t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2=1-\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

Phương trình trở thành: $t+4\left(1-t^2\right)=1 \Leftrightarrow 4t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{-3}{4}(L) \end{array}\right.$

Với $t=1$ thì

$$\sqrt{2}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\pi+k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

n) $\cos x\sin x+\left|\cos x+\sin x\right|=1.$

Giải:

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|$ điều kiện $0\le t\le\sqrt{2}$

Ta có : $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+\sin 2x \Rightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{1}{2}\left(t^2-1\right)$

Phương trình trở thành: $\dfrac{1}{2}\left(t^2-1\right)+t=1 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3(\text{L}) \end{array}\right.$

Với $t=1$ thì $\left|\sin x+\cos x\right|=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

BT 16. Giải các phương trình lượng giác:

a) $3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0.$ Điều kiện $\sin 2x\ne 0.$

$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+4\left(\tan x+\cot x\right)+2=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x$, $|t|=\left|\dfrac{2}{\sin 2x}\right|\ge 2$

Ta có: $t^2=\left(\tan x+\cot x\right)^2 \Leftrightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $3\left(t^2-2\right)+4t+2=0 \Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{2}{3}(\text{L}) \end{array}\right.$

Với $t=-2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}=-2 \Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (t/m)

b) $\frac{2}{\sin^2 x}+2\tan^2 x+5\tan x+5\cot x+4=0.$ Điều kiện $\sin 2x\neq 0.$

$\Leftrightarrow 2\left(1+\cot^2 x\right)+2\tan^2 x+5\tan x+5\cot x+4=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+5\left(\tan x+\cot x\right)+6=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x$, $|t|=\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|\geq 2$

Ta có: $t^2=\left(\tan x+\cot x\right)^2 \Leftrightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $2\left(t^2-2\right)+5t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\frac{-1}{2} \text{(L)} \end{array}\right.$

Với $t=-2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}=-2 \Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (t/m)

c) $\tan x-3\cot x=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x).$ Điều kiện $\sin 2x\neq 0.$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin x.\cos x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right).\left(\frac{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)}{\sin x.\cos x}-4\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin 2x}{\sin x.\cos x}=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{-\pi}{3}-k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ (t/ m).

d) $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0.$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\sin^2 x-2\cos^2 x+\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\left(1-\cos^2 x\right)-2\cos^2 x+\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow 2.\sin x.(1-\cos x)(1+\cos x)+(1-\cos x)(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x).\left[2\sin x.(1+\cos x)+(2\cos x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x).\left[2\sin x.\cos x+2(\sin x+\cos x)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ 2\sin x.\cos x+2(\sin x+\cos x)+1=0 \end{array}\right.$

- Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
- Với $2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x = (t^2 - 1)$.

Phương trình trở thành : $t^2 - 1 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 (L) \end{array}\right.$

Với $t = 0$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$.

$\Leftrightarrow 2\cos x.\cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x.(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.\cos x.(1 - \sin x)(1 + \sin x) + (1 - \sin x)(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x).[2\cos x.(1 + \sin x) + (2\sin x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x).[2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0 \end{array}\right.$

- Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- Với $2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x = (t^2 - 1)$.

Phương trình trở thành : $t^2 - 1 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 (L) \end{array}\right.$

Với $t = 0$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$.

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - (\sin x - \cos x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)(1 + \sin x.\cos x) - (\sin x - \cos x) + 1 = 0 (*)$

Đặt $t = \sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(1-t^2)$.

Phương trình (*) trở thành: $2t.\left[1+\frac{1}{2}(1-t^2)\right] - t + 1 = 0 \Leftrightarrow -t^3 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{(L)} \end{array}\right.$

Với $t=-1 \Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi; x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi.$

Với $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\alpha + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\alpha + k2\pi, \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

g) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x.$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x).(1 + \sin x.\cos x) = (\sin x - \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x).(1 + \sin x.\cos x - (\sin x - \cos x)) = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(1-t^2)$.

Phương trình trở thành: $t.\left(1+\frac{1}{2}(1-t^2) - t\right) = 0 \Leftrightarrow t.(-t^2 - 2t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=-3\text{(L)} \end{array}\right.$

Với $t=0 \Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

Với $t=1 \Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

h) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x).$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5 = 2.(2 - \cos x)(\sin x - \cos x).$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = (2\sin x - 2\cos x - \cos x.\sin x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - \cos x.\sin x - 2 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}(1-t^2)$.

Phương trình trở thành: $2t-\frac{1}{2}(1-t^2)-2=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2+2t-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5\text{(L)}\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\pi+k2\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$

i) $(3-\cos 4x)(\sin x-\cos x)=2.$

$\Leftrightarrow \left[3-\left(2\cos^2 2x-1\right)\right].(\sin x-\cos x)=2$

$\Leftrightarrow \left[2-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2\right].(\sin x-\cos x)=1$

$\Leftrightarrow \left[2-(\cos x-\sin x)^2.(\cos x+\sin x)^2\right].(\sin x-\cos x)=1$

Đặt $t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow 2\sin x\cos x=(1-t^2)$.

Khi đó: $(\sin x+\cos x)^2=1+1-t^2=2-t^2$

Phương trình trở thành : $t^5-2t^3+2t-1=0$ có nghiệm $t=1$

j) $\tan^2 x.\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^3 x=1$ Điều kiện : $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}.\left(1-\sin^3 x\right)=1-\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\cos^3 x}{\left(1-\sin^3 x\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{1-\sin x}.\left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}-\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1-\cos x}{1-\sin x}=0 \\ \frac{1+\cos x}{1+\sin x}-\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ (1+\cos x).\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)=(1+\sin x).\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \sin^2 x+\cos x.\sin^2 x=\cos^2 x+\sin x.\cos^2 x\end{array}\right.$

TH 1: $\cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi$

TH 2: $\sin^2 x + \cos x.\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x.\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x).(\sin x + \cos x + \sin x.\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x.\cos x = 0 \end{array}\right.$$

Với: $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Với : $(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 0.$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$

Phương trình trở thành : $t + \frac{1}{2}(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 + \sqrt{3} \\ t = -1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{array}\right.$

Với $t = -1 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \arcsin\alpha + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\alpha + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{4} + \arcsin\alpha + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Với $\left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$

5. Một số phương trình lượng giác dạng khác

Dạng 1. $m.\sin 2x+n.\cos 2x+p.\sin x+q.\cos x+r=0$

- Ta luôn viết $\sin 2x=2\sin x\cos x$, còn: $\cos 2x=\left[\begin{array}{ll} =\cos^2 x-\sin^2 x & (1) \\ =2\cos^2 x-1 & (2) \\ =1-2\sin^2 x & (3)\end{array}\right.$
- Nếu thiếu $\sin 2x$, ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường sẽ đưa được về dạng: $A^2=B^2\Leftrightarrow (A-B)(A+B)=0.$
- Nếu theo (2) được: $\sin x.(2m.\cos x+p)+\underbrace{(2n.\cos^2 x+q.\cos x+r-n)}_{(i)}=0$ và theo (3) được: $\cos x(2m.\sin x+q)+\underbrace{(-2n.\sin^2 x+p.\sin x+r+n)}_{(ii)}=0.$ Ta sẽ phân tích (i), (ii) thành nhân tử dựa vào: $at^2+bt+c=a(t-t_1)(t-t_2)$ với t_1, t_2 là hai nghiệm của $at^2+bt+c=0$ để xác định lượng nhân tử chung.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\cos 2x-\cos x-3\sin x-2=0.$

Giải:

$$\text{pt}\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\cos x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\frac{1}{2}=\sin x+\frac{3}{2} \\ \cos x-\frac{1}{2}=-\sin x-\frac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=2 \\ \cos x+\sin x=-1\end{array}\right.$$

☑ Với $\cos x-\sin x=2\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>1\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

☑ Với $\cos x+\sin x=-1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4.$

Giải:

$$\text{pt}\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-1+2\sin^2 x-7\sin x-2\cos x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2 x-7\sin x+3\right)+\left(4\sin x\cos x-2\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\sin x-3\right)+2\cos x\left(2\sin x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\cos x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0 \\ \sin x+2\cos x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x+2\cos x=3\end{array}\right.$$

☑ Với $\sin x+2\cos x=3$ thì phương trình vô nghiệm vì $1^2+2^2>3^2$

☑ Với $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG 5

BT 17. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos 2x+3\cos x+2=\sin x.$

b) $\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x.$

c) $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x=\sin 2x.$

d) $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

e) $\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\cos x=1.$

f) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2.$

g) $\cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1.$

h) $\sin 2x-\cos x+2\sin x=\cos 2x+3\sin^2 x.$

i) $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x.$

j) $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x+4=2\sqrt{2}\cos x.$

k) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x=1.$

l) $\sin 2x+\cos 2x-3\cos x+2=\sin x.$

m) $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x.$

n) $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4.$

o) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot$

p) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2.$

q) $\frac{2-\tan x}{\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\tan x}{\sqrt{2}\sin x}\cdot$

r) $\sqrt{3}(\sin 2x-3\sin x)=2\cos^2 x+3\cos x-5.$

Giải

a) $\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$

$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+2(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+2)+(\cos x+\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x+1)(\cos x+\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x+1=0\\\cos x+\sin x+2=0\end{array}\right.$

- $\cos x-\sin x+1=0\Leftrightarrow\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x+\sin x+2=0$ (PTVN)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=\pi+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

b) $\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x.$

Điều kiện: $\tan x\neq-\frac{3}{2},\cos x\neq 0$

$\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x$

$\Leftrightarrow 5+\cos^2 x-\sin^2 x=6\cos x+4\sin x$

$\Leftrightarrow (\cos x-3)^2=(\sin x+2)^2$

$\Leftrightarrow -\cos x+3=\sin x+2 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(l) \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

c) $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x=\sin 2x.$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=2\sin x\cos x+\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\sin x+1)=\cos x(2\sin x+1)$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x-\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x+1=0 \\ \sin x-\cos x+1=0 \end{array}\right.$

- $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, x=k2\pi, x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

d) $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 5\cos x+\sin x-3=\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\cos x+\sin x-3=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2+2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow (\cos x-2)(2\cos x-1)+\sin x(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ \sin x+\cos x-2=0 \end{array}\right.$

- $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x+\cos x-2=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=2$ (PTVN)

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

e) $\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\cos x=1$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\cos^2 x+\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)+\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

f) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=3\sin x+\cos x+2$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-3\sin x+2\cos^2 x-\cos x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-3)+(\cos x+1)(2\cos x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-3)(\sin x+\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x-3=0\quad (\text{PTVN})\\ \sin x+\cos x+1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

g) $\cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1.$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x-2\cos x(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ 1-2\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

h) $\sin 2x-\cos x+2\sin x=\cos 2x+3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x+2\sin x=2\cos^2 x-1+3(1-\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x+2\sin x=-\cos^2 x+2$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\sin x+\cos^2 x-\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+1)+(\cos x+1)(\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+1)(2\sin x+\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+1=0\\ 2\sin x+\cos x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ 2\sin x+\cos x=2\end{array}\right.$

- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
- $2\sin x+\cos x=2$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\alpha+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=\pi+k2\pi, x=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\alpha+k2\pi,$

$$x=\pi-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

i) $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x.$

$\Leftrightarrow \sin 2x-1-\cos 2x=3\sin x-\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\cos x+2\sin^2 x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x+1)+(\sin x-2)(2\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x+\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x+1=0\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x+\cos x-2=0\ (\text{PTVN}) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

i) $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x+4=2\sqrt{2}\cos x\quad (1)$

Lời giải

$2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x+4=2\sqrt{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos x\right)+(-\cos 2x-7\sin x+4)=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x-1)+\left(2\sin^2 x-7\sin x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x-1)+(\sin x-3)(2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left(2\sqrt{2}\cos x+\sin x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x=0 \\ 2\sqrt{2}\cos x+\sin x=3 \end{array}\right.$

- Với $2\sin x=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

- Với $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3 \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \cos\alpha \quad \text{và} \quad \dfrac{1}{3} = \sin\alpha\right)$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

k) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x = 1.$

Lời giải

$\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x - \cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin^2 x + 3\sin x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin x - 1\right)\left(\sin x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - 1\right)\left(\cos x + \sin x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \end{array}\right.$

Với $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Với $\cos x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

l) $\sin 2x + \cos 2x - 3\cos x + 2 = \sin x$

Lời giải

$\sin 2x + \cos 2x - 3\cos x + 2 = \sin x$

$\Leftrightarrow \left(\sin 2x - \sin x\right) + \left(2\cos^2 x - 3\cos x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - 1\right) + \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 1\right) = 0$

$\left(2\cos x - 1\right)\left(\sin x + \cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Với $\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

m) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x.$

Lời giải

$\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$

$\Leftrightarrow \left(\sin 2x - \sin x\right) + \left(2\cos 2x + 4\cos x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - 1\right) + \left(2\cos x + 3\right)\left(2\cos x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+2\cos x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x=1 \\ \sin x+2\cos x+3=0 \end{array}\right.$

- $2\cos x=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\sin x+2\cos x+3=0$ (vô nghiệm vì $1^2+2^2<3^2$)

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

n) $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4.$

Lời giải

$2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$

$\Leftrightarrow (2\sin 2x-2\cos x)+(-\cos 2x-7\sin x+4)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin^2 x-7\sin x+3)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x+\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ 2\cos x+\sin x-3=0 \end{array}\right.$

Với $\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Với $2\cos x+\sin x-3=0$ (vô nghiệm vì $1^2+2^2<3^2$)

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

o) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot$

Lời giải.

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1-\sin x)-2\sqrt{3}\cos x(1-\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \tan x=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

p) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2.$

Lời giải.

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=\sin x+3\cos x-2$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)\sin x+2\cos^2 x-3\cos x+1=0\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

q) $\dfrac{2-\tan x}{\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1-\tan x}{\sqrt{2}\sin x}$.

Lời giải.

ĐK: $\begin{cases}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \sin 2\text{x}\neq 0\end{cases}$

$$\frac{2-\tan x}{\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\tan x}{\sqrt{2}\sin x}\Leftrightarrow \frac{2\cos x-\sin x}{\cos 5x+\sin 5x}=\frac{\cos x-\sin x}{2\sin x}\Leftrightarrow 2\sin 2x+\cos 2x-1=\cos 6x+\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x-\sin 4x-1=\cos 6x-\cos 2x\Leftrightarrow 2\sin 2x-\sin 4x-1=-2\sin 4x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=-1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$$

r) $\sqrt{3}(\sin 2x-2\sin x)=2\cos^2 x+3\cos x-5.$

Lời giải.

$$\sqrt{3}(\sin 2x-2\sin x)=2\cos^2 x+3\cos x-5\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x(\cos x-1)=(\cos x-1)(2\cos x+5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-1=0\\ 2\sqrt{3}\sin x-2\cos x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ 2\sqrt{3}\sin x-2\cos x=5(VN)\end{array}\right.$$

Dạng 2: Phương trình có chứa $R(...,\tan X,\cot X,\sin 2X,\cos 2X,\tan 2X,...)$, sao cho cung của sin, cos gấp đôi cung của tan hoặc cotan. Lúc đó đặt $t=\tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X=2\sin X\cos X=2\cdot\dfrac{\sin X}{\cos X}\cdot\cos^2 X=\dfrac{2\tan X}{1+\tan^2 X}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.
- $\cos 2X=2\cos^2 X-1=2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 X}-1=\dfrac{1-\tan^2 X}{1+\tan^2 X}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan 2X=\dfrac{\sin 2X}{\cos 2X}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ và $\cot 2X=\dfrac{1-t^2}{2t}$.

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t, giải ra sẽ tìm được $t\Rightarrow x$.

Ví dụ. Giải phương trình: $\sin 2x+2\tan x=3.$

Giải:

Điều kiện $\cos x \neq 0$

$$\text{pt} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\tan x = 3 \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + 2\tan x = 3 \Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(2\tan^2 x - \tan x + 3) = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)\left[2\left(\tan x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG 6

BT 18. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1 + 3\tan x = 2\sin 2x.$

b) $\cos 2x + \tan x = 1.$

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3.$

d) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$

e) $1 + \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}.$

f) $\cot x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right).$

g) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$

h) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x.$

Lời giải

a) $1 + 3\tan x = 2\sin 2x.$

Điều kiện $\cos x \neq 0.$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 1 + 3\tan x = \frac{4\tan x}{1 + \tan^2 x} \Leftrightarrow 3\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x - 2\tan x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x + 1 = 0\\ 3\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \ (\text{v« nghiÖm})\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos 2x + \tan x = 1.$

Điều kiện $\cos x \neq 0.$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x + \tan x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \tan x(\tan x - 1)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3.$

Điều kiện $\cos x \neq 0.$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} + 2\tan x = 3 \Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(2\tan^2 x - \tan x + 3) = 0.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x-1=0\\ 2\tan^2 x-\tan x+3=0\ (\text{v« nghiÖm})\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

d) $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x.$

Điều kiện $\cos x\neq 0.$

Pt $\Leftrightarrow (1-\tan x)\left(1+\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right)=1+\tan x \Leftrightarrow (1-\tan x)(\tan x+1)^2=(1+\tan x)(1+\tan^2 x).$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x(\tan x+1)=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

e) $1+\cot\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1+\tan x}{1+\sin 2x}\cdot$

$pt \Leftrightarrow 1-\tan x=\dfrac{1+\tan x}{1+\sin 2x}.$

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq -1\end{cases}.$

Điều kiện $\cos x\neq 0.$

Pt $\Leftrightarrow (1-\tan x)\left(1+\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right)=1+\tan x \Leftrightarrow (1-\tan x)(\tan x+1)^2=(1+\tan x)(1+\tan^2 x).$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x(\tan x+1)=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (\text{lo¹i})\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

f) $\cot x=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x},\ \forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cdot$

Điều kiện $\sin x\neq 0.$

Pt $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}-\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}{2+\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\tan^2 x+2\tan x-1}{2\tan^2 x+2\tan x+2}.$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-3\tan x-2=0 \Leftrightarrow (\tan x-2)(\tan x+1)^2=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\text{acrtan}2+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

g) $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}\cdot$

Điều kiện $\sin 2x\neq 0.$

Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{\tan x}-\tan x+\frac{8\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$

$\Leftrightarrow 1+\tan^2 x-\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)+8\tan^2 x=\left(1+\tan^2 x\right)^2$.

$\Leftrightarrow 2\tan^4 x-6\tan^2 x=0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x\left(\tan^2 x-3\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\,(loai)\\ \tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

h) $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x.$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}$.

Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{\tan x}-1=\frac{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}{1+\tan x}+\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan x}-1=\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}+\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$.

$\Leftrightarrow \left(1-\tan x\right)\left(1+\tan^2 x\right)=\tan x\left(\tan^2 x-2\tan x+1\right)$.

$\Leftrightarrow \tan x\left(\tan x-1\right)^2+\left(\tan x-1\right)\left(1+\tan^2 x\right)=0.$

$\Leftrightarrow \left(\tan x-1\right)\left(2\tan^2 x-\tan x+1\right)=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ 2\tan^2 x-\tan x+1=0\ (\text{v« nghiÖm})\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Dạng 3: Áp dụng $\begin{cases}\tan(x+a)\tan(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cot(x+a)\cot(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$ hay $\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a.\tan b}$.

Ví dụ. Giải phương trình: $\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải:

Điều kiện $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$ và $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

Ta có $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}.\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=-1$

Khi đó pt $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$

pt $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x-\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left[(1-\cos x)+(\sin x\cos x-\sin x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1-\cos x)(1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \cos x=1\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

So sánh điều kiện, phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG 7

BT 19. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x=\dfrac{\sin x-\cos 3x+2\cos 2x\cos x}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$. b) $\dfrac{\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}=-\dfrac{1}{8}$.

c) $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x.$ d) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$.

e) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x.$

Hướng dẫn giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\sin 2x=\frac{\sin x-\cos 3x+2\cos 2x\cos x}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}\Leftrightarrow \sin x-\cos 3x+2\cos 2x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos 3x+\cos x+\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

Đặt $t=\sin x+\cos x,|t|\leq\sqrt{2}$, suy ra $\sin 2x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t^2-1)\Leftrightarrow t^2-1=\sqrt{2}t\Leftrightarrow t^2-\sqrt{2}t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

Với $t=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ suy ra $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (loại)

Với $t=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ suy ra $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \\ \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=-\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.\sin 3x+\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}.\cos 3x=-\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x+3\cos x.\cos 3x+\cos^2 3x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x\sin 3x+\cos x.\cos 3x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos x.\cos 3x+\sin x\sin 3x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x+\cos 6x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x+4\cos^3 2x-3\cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x=-\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đối chiếu với điều kiện nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c) Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \end{cases}.$

Phương trình đã cho tương đương

$\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \cos^4 4x \Leftrightarrow \sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\left(\sin 2x\cos 2x\right)^2 = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 4x\right) = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0 \quad (1)$

Đặt

$\cos^2 4x = t \geq 0$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2}(l) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) trở thành:

$t = 1 \Rightarrow \cos^2 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = \pm 1 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

$x = k\pi \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đối chiếu với điều kiện nghiệm của pt là và

d) Điều kiện: $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases}.$

Phương trình đã cho tương đương

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\left(\sin x\cos x\right)^2=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

Đối chiếu với điều kiện nghiệm của pt là

e) Điều kiện: $\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin x+\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0\\ \cos\frac{3x}{2}=\cos\frac{x}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}=k\pi \\ \frac{3x}{2}=\frac{x}{2}+k2\pi \\ \frac{3x}{2}=-\frac{x}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{3} \\ x=k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{3} \\ x=k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

$$x=k\pi \qquad x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Đối chiếu với điều kiện nghiệm của pt là và

BT 20. Giải các phương trình lượng giác sau (đặt ẩn phụ t bởi cung phức tạp):

a) $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x.$

b) $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1.$

c) $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right).$

d) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$

e) $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x.$

f) $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x.$

g) $\sin^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x.$

h) $\cos x-2\cos 3x=1+\sqrt{3}\sin x.$

Lời giải

a) Đặt $\frac{2x}{3}=t\Rightarrow x=\frac{3}{2}t$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\cos 2t=\frac{1+\cos 3t}{2}\Leftrightarrow 2\cos 2t=1+\cos 3t\Leftrightarrow \cos 2t-\cos 3t=1-\cos 2t$$

$$\leftrightarrow -2\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\sin\frac{5t}{2}=2\sin^2\frac{t}{2}\Leftrightarrow 2\sin\frac{t}{2}\left[\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{5t}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}\sin t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{t}{2}=0\\ \cos\frac{3t}{2}=0\\ \text{sint}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k2\pi\\ t=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\\ t=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ t=k\pi\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{3}{2}k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

b) ĐK: $\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\end{cases}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$$\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1\Leftrightarrow\left(\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}\right)^3=\tan x-1\Leftrightarrow\left(\frac{\tan x-1}{1-\tan x}\right)^3=\tan x-1$$

$$\Leftrightarrow -1=\tan x-1\Leftrightarrow\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c) Đặt $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=\frac{3}{5}\pi-2t.$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\pi-3t\right)\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\sin 3t\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t-\sin t=0\Leftrightarrow\sin t\left(4\sin^2 t-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin t=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ t=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ t=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}-k2\pi \\ x=\frac{14\pi}{15}-k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

d) Đặt $x+\frac{\pi}{4}=t\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sin\left(3t-\pi\right)=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\Leftrightarrow \sin\left(\pi-3t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\sin t\Leftrightarrow \sin 3t=\cos 2t\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2t+t\right)=\cos 2t\sin t\Leftrightarrow \sin 2t\cos t+\cos 2t\sin t=\cos 2t\sin t\Leftrightarrow \sin 2t\cos t=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2t=0 \\ \cos t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=k\pi \\ t=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} t=k\frac{\pi}{2} \\ t=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow t=k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

e) Đặt $x+\frac{\pi}{3}=t\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$8\cos^3 t=\cos\left(3t-\pi\right)\Leftrightarrow 8\cos^3 t=\cos\left(\pi-3t\right)\Leftrightarrow 8\cos^3 t=-\cos 3\mathrm{t}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t+4\cos^3 t-3\cos t=0\Leftrightarrow 12\cos^3 t-3\cos t=0\Leftrightarrow \cos t\left(4\cos^2 t-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t=0 \\ \cos t=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ t=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ t=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\pi+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

f) Đặt $x+\frac{\pi}{4}=t\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt{2}\sin^3 t = 2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin^3 t = 2\left(\sin t\cos\frac{\pi}{4}-\cos t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin^3 t = \sqrt{2}\left(\sin t-\cos t\right) \Leftrightarrow \sin^3 t-\sin t+\cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(\sin^2 t-1\right)+\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin t\cos^2 t+\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(1-\sin t\cos t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t = 0\\ \sin 2t = 2\,(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

f) Đặt $x-\frac{\pi}{4} = t \Rightarrow x = t+\frac{\pi}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sin^3 t = \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t+\cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t-\sin t-\cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(\sin^2 t-1\right)-\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin t\cos^2 t-\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(1+\sin t\cos t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t = 0\\ \sin 2t = -2\,(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

h)

$$\cos x-2\cos 3x = 1+\sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)-2\cos 3x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)-2\cos 3x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-2\cos 3x-1 = 0$$

Đặt $\frac{\pi}{3}+x = t \Rightarrow x = t-\frac{\pi}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$2\cos t-2\cos\left(3t-\pi\right)-1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos t-2\cos\left(\pi-3t\right)-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t+2\cos 3t-1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos t+2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t - 4\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos t + 1)(4\cos^2 t - 2\cos t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = -\dfrac{1}{2} \\ \cos t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ t = \pm\arccos\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \\ x = \pm\arccos\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4} - \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right..$$

Dạng 4. Phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt

- Tổng các số không âm: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.
- Đối lập: $A = B$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \le M \\ B \ge M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}$.

  Hoặc: $A + B = M + N$ mà chứng minh được: $\begin{cases} A \le M \\ B \le N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$.
- Một số trường hợp đặc biệt:
  - $\sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases}$.
  - $\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$.
  - $\cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases}$.
  - $\cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$.
  - $\sin u . \sin v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.
  - $\sin u . \sin v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.
  - $\cos u . \cos v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.
  - $\cos u . \cos v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG 8

BT 21. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$.

b) $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0$.

c) $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$.

d) $8\sin^3 x-\sin^2 2x-6\sin x-\cos^2 x-1=0.$

e) $\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0.$

f) $4\sin^2 x+\sin^2 3x=4\sin x\sin^2 3x.$

g) $5\sin^2 x+3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2\sqrt{3}\cos x+2\sin x-2=0.$

h) $\sin^2 2x+2\sin 2x+\dfrac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1=0.$

i) $-4\cos^2 x+3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=4\sin x-6.$

j) $8\cos 4x\cos^2 2x+\sqrt{1-\cos 3x}+1=0.$

k) $\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x\right)=\sin x\sin^2 3x.$

Hướng dẫn giải

a. $4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0.$

ĐK : $\cos x\ne 0$

$\Rightarrow 4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0.$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x-\sqrt{3}=0\\ \sqrt{3}\tan x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

b. $4\cos^2 x-4\cos x+3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+2=0.$

ĐK : $\cos x\ne 0$

$\Rightarrow 4\cos^2 x-4\cos x+3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+2=0.$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\tan x-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x-1=0\\ \sqrt{3}\tan x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{cases} \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình vô nghiệm

c. $2\sin^2 x+3\tan^2 x-6\tan x-2\sqrt{2}\sin x+4=0.$

ĐK : $\cos x\ne 0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0.$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)^2 + 3\left(\tan x - 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

d. $\cos^2 x\tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0.$

ĐK : $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow \cos^2 x\tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0.$

$\Leftrightarrow \cos^2 x\tan^2 4x + \left(\sin x + \cos x\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan 4x = 0 \end{array}\right. \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{4} \end{array}\right. \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

e. $4\sin^2 x + \sin^2 3x = 4\sin x\sin^2 3x.$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \sin^2 3x - 4\sin x\sin^2 3x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sin^2 3x\right)^2 + \sin^2 3x - \sin^4 3x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sin^2 3x\right)^2 + \sin^2 3x.\cos^2 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sin^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x.\cos^2 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

f. $\sin^2 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0.$

ĐK : $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x + 1 + \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin 2x + 1\right)^2 + \left(\tan x + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

l) $-4\cos^2 x+3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=4\sin x-6.$

Điều kiện $\cos x\neq 0$

$$\Rightarrow -4\cos^2 x+3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=4\sin x-6$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x-4\sin x+1+3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)^2+\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \tan x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{-\pi}{6}+k\pi\end{cases}$$

m) $8\cos 4x\cos^2 2x+\sqrt{1-\cos 3x}+1=0.$

$$\Leftrightarrow 8\left(2\cos^2 2x-1\right)\cos^2 2x+\sqrt{1-\cos 3x}+1=0.$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^4 2x-8\cos^2 2x+1+\sqrt{1-\cos 3x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 2x-1\right)^2+\sqrt{1-\cos 3x}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^2 2x-1=0\\ \sqrt{1-\cos 3x}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos 4x+1=0\\ \sqrt{1-\cos 3x}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 4x=\dfrac{-1}{2}\\ \cos 3x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

n) $\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x\right)=\sin x\sin^2 3x.$

Điều kiện $\sin 4x\neq 0$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x\right)=\sin x\sin^2 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\frac{\sin^2 3x}{4}=\sin x\sin^2 3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x+\sin^2 3x-4\sin x\sin^2 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sin^2 3x\right)^2+\sin^2 3x-\sin^4 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sin^2 3x\right)^2+\sin^2 3x.\cos^2 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin x-\sin^2 3x=0\\ \sin^2 3x.\cos^2 3x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\end{cases}$$

BT 22. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x\cos 2x=1.$

b) $\sin 2x\cos 4x=1.$

c) $\sin x\sin 3x=-1.$

d) $\cos 2x\cos 6x=1.$

e) $(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin 5x+1=0.$

f) $(\cos x+\sin x)(\sin 2x-\cos 2x)+2=0.$

g) $\sin 7x-\sin x=2.$

g) $\cos 4x-\cos 6x=2.$

i) $\sin^3 x+\cos^3 x=1.$

j) $\sin^5 x-\cos^3 x=1.$

Hướng dẫn giải

a) $\cos x\cos 2x=1.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ 2\cos^2 x=2\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ 2\cos^2 x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

b) $\sin 2x\cos 4x=1.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x=1\\ \cos 4x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x=-1\\ \cos 4x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x=1\\ 1-2\sin^2 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x=-1\\ 1-2\sin^2 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

c) $\sin x\sin 3x=-1.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 3x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ 3\sin x-4\sin^3 x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-1\\ 3\sin x-4\sin^3 x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\pm1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

d) $\cos 2x\cos 6x=1.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 6x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x=-1\\ \cos 6x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=1\\ 4\cos^3 2x-3\cos 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x=-1\\ 4\cos^3 2x-3\cos 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x=\pm1\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

e) $(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin 5x+1=0.$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\sin 5x=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=-1\\ \sin 5x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x=1\\ \sin 5x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{-\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

f) $(\cos x+\sin x)(\sin 2x-\cos 2x)+2=0.$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=k\pi\end{cases}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Phương trình vô nghiệm

g) $\sin 7x-\sin x=2.$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x sin3x=2$

$\Leftrightarrow \cos 4x\sin 3x=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=-1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{-\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\end{cases}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Phương trình vô nghiệm

g) $\cos 4x-\cos 6x=2.$

$$\Leftrightarrow s\text{inx}.\sin 5x=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 5x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 5x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\\ x=\frac{-\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

i) $\sin^3 x+\cos^3 x=1.$

$\sin^3 x+\cos^3 x=1.$

$\text{VT}=\sin^3 x+\cos^3 x\le \sin^2 x+\cos^2 x=1=VP$

$$\Rightarrow VT=VP \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}s\text{inx}=0\\ \cos x=1\end{cases}\\ \begin{cases}s\text{inx}=1\\ \cos x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

j) $\sin^5 x-\cos^3 x=1.$

$$\begin{cases}\sin^5 x \le \sin^2 x\\ -\cos^3 x \le \cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^5 x - \cos^3 x \le 1$$

$$\Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x = 1\\ \cos x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

BT 23. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x\sin x$.

c) $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$.

d) $\tan 2x + \tan 3x = \dfrac{-1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}$.

e) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$.

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$.

g) $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$.

g) $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} - 2 = 0$.

i) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x\cos 2x\cos 3x + 2$.

Hướng dẫn giải

a) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta có

$\tan^2 x + \cot^2 x \ge 2\sqrt{\tan^2 x.\cot^2 x} \Rightarrow VT \ge 2$

$2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 2 \Rightarrow VP \le 2$

$$\Rightarrow VP = VP \Leftrightarrow \begin{cases}VP = 2\\ Vp = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\tan x = \cot x = \pm 1\\ \sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

c) $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$.

Ta có:

$\text{VT} = 2\sin 5x + \cos 4x \le 3$

$VP = 3 + \cot^2 x. \ge 3$

$$\Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases}VP = 3\\ VT = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 5x = 1\\ \cos 4x = 1\\ \cot x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

d) $\tan 2x + \tan 3x = \dfrac{-1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}$.

Điều kiện xác định: $\sin x\cos 2x\cos 3x \ne 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x} = \frac{-1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x = 1\\ \sin 5x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x = -1\\ \sin 5x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ x = \frac{-\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi\\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\end{cases}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình vô nghiệm

e) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x.$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 3x.\sin^2 x - 2\sin 3x = 6$

$VT = 4\sin^2 3x.\sin^2 x - 2\sin 3x \le 6 = VP$

$$\Rightarrow VP = VP \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 3x.\sin^2 x = 1\\ \sin 3x = -1\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|.$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin^4 x \le |\sin x|\\ -\cos^4 x \le |\cos x|\end{cases} \Rightarrow VT \le VP$$

$$\Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \pm 1\\ \cos x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

g) $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0.$

$\Leftrightarrow (1 + \cos 6x)\cos 2x - 1 - \cos 2x = 0.$

$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos 6x = 1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x = -1\\ \cos 6x = -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x = 1\\ 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x = -1\\ 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$$

g) $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0.$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos\frac{3x}{4} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \frac{8k\pi}{3}\end{array}\right. \Rightarrow x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

i) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x\cos 2x\cos 3x + 2.$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 6x+\cos 4x=\cos x\cos 2x\cos 3x+2.$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x+2\cos^2 2x-1=\cos x\cos 2x\cos 3x+2$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(\cos 4x+\cos 2x\right)-1=\cos x\cos 2x\cos 3x+2$

$\Leftrightarrow 4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos x\cos 2x\cos 3x+3$

$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x\cos 3x=3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x\cos 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 2x\cos 3x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \left(2\cos^2 x-1\right)\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \left(2\cos^2 x-1\right)\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

BT 24. Tìm tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm:

a) $\cos(2x-15^0)=2m^2+m.$

b) $m\cos x+1=3\cos x-2m.$

c) $(4m-1)\sin x+2=m\sin x-3.$

d) $(m^2+m)\cos 2x=m^2-m-3+m^2\cos 2x.$

e) $m\sin x+2\cos x=1.$

f) $m\cos 2x+(m+1)\sin 2x=m+2.$

g) $m\sin x\cos x+\sin^2 x=m.$

g) $\sin x-\sqrt{5}\cos x+1=m(2+\sin x).$

i) $\sin 2x+4(\cos x-\sin x)=m.$

j) $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+m=1.$

k) $\sin 2x-2\sqrt{2}m(\sin x-\cos x)+1=4m.$

l) $3\sin^2 x+m\sin 2x-4\cos^2 x=0.$

m) $(m+2)\cos^2 x+m\sin 2x+(m+1)\sin^2 x=m-2.$

n) $\sin^2 x+(2m-2)\sin x\cos x-(1+m)\cos^2 x=m.$

Hướng dẫn giải

a) $\cos(2x-15^0)=2m^2+m.$

Ta có : $-1\le\cos(2x-15^0)\le 1\Rightarrow -1\le 2m^2+m\le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2m^2+m\ge -1\\ 2m^2+m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2m^2+m+1\ge 0.\forall m\\ 2m^2+m-1\le 0\end{cases}\Rightarrow -1\le m\le\frac{1}{2}$$

Vậy $-1\le m\le\frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm

b) $m\cos x+1=3\cos x-2m.$

$\Leftrightarrow\left(m-3\right)\cos x=-1-2m(*)$

Th1: $m=3\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 0=-7$ vô lý. Phương trình vô nghiệm

Th2: $m\ne 3\Rightarrow\left(*\right)\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{-1-2m}{m-3}$

Ta có $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -1\le\dfrac{-1-2m}{m-3}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1-2m}{m-3}\ge -1\\ \dfrac{-1-2m}{m-3}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le m<3\\ \left[\begin{array}{l}m\le -\dfrac{4}{3}\\ m>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -4\le m\le -\dfrac{4}{3}$

Vậy $-4 \le m \le -\frac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm

c) $(4m-1)\sin x + 2 = m\sin x - 3.$

$\Leftrightarrow (3m-1)\sin x = -5(*).$

Th1: $m = \frac{1}{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 0 = -5$ (vô lý). Vậy phương trình vô nghiệm

Th2: $m \ne \frac{1}{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sin x = \frac{-5}{3m-1}$

Có $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{-5}{3m-1} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5}{3m-1} \le 1 \\ \frac{-5}{3m-1} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{3} \\ m \le -\frac{4}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m < \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -\frac{4}{3} \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm.

d) $(m^2+m)\cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2\cos 2x.$

$\Leftrightarrow m\cos 2x = m^2 - m - 3(*)$

Th1: $m = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 0 = -3$ vô lý. Vậy phương trình vô nghiệm

Th2: $m \ne 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{m^2-m-3}{m}$

Có $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{m^2-m-3}{m} \le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2-m-3}{m} \ge -1 \\ \frac{m^2-m-3}{m} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left[-\sqrt{3};0\right) \cup \left[\sqrt{3};+\infty\right) \\ m \in [-1;0) \cup [3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1;0) \cup [3;+\infty)$

Vậy $m \in [-1;0) \cup [3;+\infty)$ thì phương trình có nghiệm.

e) $m\sin x + 2\cos x = 1.$

Để phương trình có nghiệm $m^2 + 4 \ge 1 \Leftrightarrow m^2 \ge -3. \forall m$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi giá trị m

f) $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m + 2.$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \ge (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le -1 \end{array}\right.$

g) $m\sin x\cos x + \sin^2 x = m.$

$\Leftrightarrow m\sin 2x - \cos 2x = 2m - 1$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+1 \ge (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2-4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{4}{3}$

Vậy $0 \le m \le \frac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm.

g) $\sin x - \sqrt{5}\cos x + 1 = m(2+\sin x)$.

$\Leftrightarrow (m-1)\sin x + \sqrt{5}\cos x = 1-2m$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)^2+5 \ge (1-2m)^2 \Leftrightarrow 3m^2-2m-5 \le 0$

$$\Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{5}{3}$$

Vậy $-1 \le m \le \frac{5}{3}$ thì phương trình có nghiệm

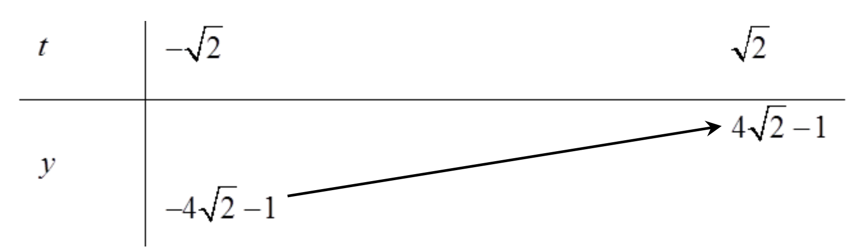
i) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m.(*)$

Đặt $t = (\cos x - \sin x); |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 1 - t^2 + 4t = m$

Đặt $y = 1 - t^2 + 4t; |t| \le \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có nghiệm : $-4\sqrt{2}-1 \le m \le 4\sqrt{2}-1$

j) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m = 1.(*)$

Đặt $t = (\cos x + \sin x); |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow t^2 + 2t = 2 - m$

$y = t^2 + 2t; |t| \le \sqrt{2}$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$
y	$2-\sqrt{2}$ ↘	-1	↗ $2+\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có nghiệm: $-1 \le 2 - m \le 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \le m \le 3$

Vậy $\sqrt{2} \le m \le 3$ thì phương trình có nghiệm

k) $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 = 4m$.

Đặt $t=\sin x-\cos x;|t|\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

$\Rightarrow (*)\Leftrightarrow 1-t^2-2\sqrt{2}mt+1=4m$

$\Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-2\sqrt{2}m-\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=2\sqrt{2}m+2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m

l) $3\sin^2 x+m\sin 2x-4\cos^2 x=0.$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{1-\cos 2x}{2}+m\sin 2x-4\dfrac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 3-3\cos 2x+2m\sin 2x-4+4\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2m\sin 2x+\cos 2x=1$

Để phương trình có nghiệm $4m^2+1\ge 1\Leftrightarrow 4m^2\ge 0.\forall m$

Vậy phương trình có nghiệm $\forall m$

m) $(m+2)\cos^2 x+m\sin 2x+(m+1)\sin^2 x=m-2.$

$\Leftrightarrow (m+2)\dfrac{1+\cos 2x}{2}+m\sin 2x+(m+1)\dfrac{1-\cos 2x}{2}=m-2$

$\Leftrightarrow (m+2)+(m+2)\cos 2x+2m\sin 2x+(m+1)-(m+1)\cos 2x=2m-4$

$\Leftrightarrow \cos 2x+2m\sin 2x=-7$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1+4m^2\ge 49\Leftrightarrow m^2\ge 16\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -4 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -4 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm.

n) $\sin^2 x+(2m-2)\sin x\cos x-(1+m)\cos^2 x=m.$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}+(m-1)\sin 2x-(1+m)\dfrac{1+\cos 2x}{2}=m$

$\Leftrightarrow 1-\cos 2x+2(m-1)\sin 2x-(1+m)+(1+m)\cos 2x=2m$

$\Leftrightarrow m\cos 2x+2(m-1)\sin 2x=3m$

Để phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2+4(m-1)^2\ge 9m^2\Leftrightarrow 4m^2+8m-4\le 0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-2\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{3}\le m\le -1+\sqrt{3}$

Vậy $-1-\sqrt{3}\le m\le -1+\sqrt{3}$ thì phương trình có nghiệm.

BT 25. Cho phương trình: $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0.$

a) Giải phương trình khi $m=\dfrac{3}{2}\cdot$

b) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

Hướng dẫn giải

Có $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x-m)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x-m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$

c) Giải phương trình khi $m=\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{3}{2}(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

d) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

Có $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$ không có nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos x=m$ có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -1\le m<0$

Vậy $-1\le m<0$ thì phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

BT 26. Cho phương trình: $\cos 4x+6\sin x\cos x=m.$

a) Giải phương trình khi $m=1$.

b) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Hướng dẫn giải:

Có: $\cos 4x+6\sin x\cos x=m.$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+3\sin 2x=m(*)$

Đặt $t = \sin 2x$ với $|t| \le 1$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow -2t^2 + 3t + 1 = m\ (**)$

c) Giải phương trình khi $m = 1$.

Với $m = 1$. Đặt $t = \sin 2x$ với $|t| \le 1$

$\Rightarrow -2t^2 + 3t + 1 = 1$

$\Leftrightarrow -2t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{3}{2} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

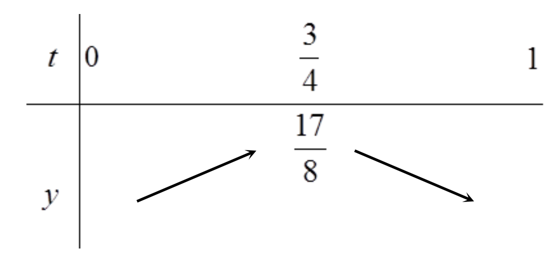
d) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Phương trình (*) có nghiệm $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Phương trinh (**) có nghiệm $[0;1]$

Đặt $y = -2t^2 + 3t + 1$

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $2 \le m \le \frac{17}{8}$

Vậy $2 \le m \le \frac{17}{8}$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

BT 27. Tìm tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 1 = m$ có nghiệm $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

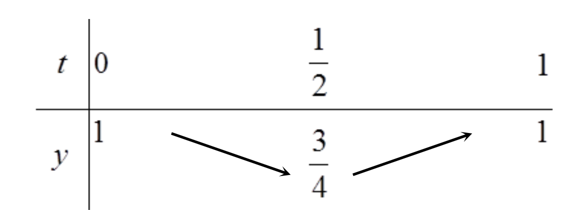
Đặt $t = \cos x$

Ta có $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1]$

Phương trình trở thành: $t^2 - t + 1 = m$

Đặt $y = t^2 - t + 1$

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có nghiệm: $\frac{3}{4} \le m \le 1$

Vậy $\frac{3}{4} \le m \le 1$ thì phương trình có nghiệm $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

BT 28. Tìm tham số m để $2\cos 2x + (m+4)\sin x = m+2$ có 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

$2\cos 2x + (m+4)\sin x = m+2$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + (m+4)\sin x = m+2$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - (m+4)\sin x + m + 1 = 0$

Đặt $t = \text{sinx}$

Có $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$

Phương trình trở thành

$$2t^2 - (m-4)t + m + 1 = 0$$

§ 3. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\left(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3,\ \forall x\in(0;\ 2\pi).$ **(ĐH khối A năm 2002)**

b) $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x.$ **(ĐH khối B năm 2002)**

c) $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0,\ \forall x\in\left[0;\ 14\right].$ **(ĐH khối D năm 2002)**

BT 29. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2003)**

b) $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}\cdot$ **(ĐH khối B năm 2003)**

c) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\dfrac{x}{2}=0.$ **(ĐH khối D năm 2003)**

BT 30. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x.$ **(ĐH khối B năm 2004)**

b) $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x.$ **(ĐH khối D năm 2004)**

BT 31. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0.$ **(ĐH khối A năm 2005)**

b) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$ **(ĐH khối B năm 2005)**

c) $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0.$ **(ĐH khối D năm 2005)**

BT 32. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{2(\cos^6 x+\sin^6 x)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0.$ **(ĐH khối A năm 2006)**

b) $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4.$ **(ĐH khối B năm 2006)**

c) $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0.$ **(ĐH khối D năm 2006)**

BT 33. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2007)**

b) $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x.$ **(ĐH khối B năm 2007)**

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2.$ **(ĐH khối D năm 2007)**

BT 34. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)\cdot$ **(ĐH khối A năm 2008)**

b) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$ **(ĐH khối B năm 2008)**

c) $2\sin x(1+\cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x.$ **(ĐH khối D năm 2008)**

BT 35. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}.$ **(ĐH khối A năm 2009)**

b) $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$ **(ĐH khối B năm 2009)**

c) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối D năm 2009)**

BT 36. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$ **(ĐH khối A năm 2010)**

b) $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối B năm 2010)**

c) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0.$ **(ĐH khối D năm 2010)**

BT 37. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2011)**

b) $\sin 2x\cos x + \sin x\cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x.$ **(ĐH khối B năm 2011)**

c) $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$ **(ĐH khối D năm 2011)**

BT 38. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$ **(ĐH khối A năm 2012)**

b) $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$ **(ĐH khối B năm 2012)**

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x.$ **(ĐH khối D năm 2012)**

BT 39. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$ **(ĐH khối A năm 2013)**

b) $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1.$ **(ĐH khối B năm 2013)**

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối D năm 2013)**

BT 40. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2014)**

b) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x.$ **(ĐH khối B năm 2014)**

BT 41. Giải phương trình: $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0.$ **(TN THPT QG năm 2016)**

BT 42. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0.$

b) $\cos x\cos 2x\cos 3x-\sin x\sin 2x\sin 3x=\dfrac{1}{2}\cdot$

c) $\cot x+\cos 2x+\sin x=\sin 2x\cot x+\cos x\cot x.$

d) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x.$

e) $4+3\sin x+\sin^3 x=3\cos^2 x+\cos^6 x.$

f)

g) $2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x.$

h) $\sin^2 x(4\cos^2 x-1)=\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x).$

i) $\cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-4\cos 2x\cos x-2\cos^2 x+2=0.$

j) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right]\cdot$

k) $\dfrac{1}{2\cot^2 x+1}+\dfrac{1}{2\tan^2 x+1}=\dfrac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}\cdot$

l) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\tan x-1}+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1.$

m) $3\sin^2 x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x.$

n) $\dfrac{(2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)-2\sin 3x+6\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}+2\cos x+\sqrt{3}=0.$

o) $\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x}=2.$

p) $(\tan x+1)\sin^2 x+\cos 2x+2=3(\cos x+\sin x)\sin x.$

q) $\sin^3 x-\cos^3 x+3\sin^2 x+4\sin x-\cos x+2=0.$

r) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}(\sin x-3)=7\cos x.$

s) $8(\sin^6 x+\cos^6 x)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x.$

t) $\dfrac{\sin 5x}{\sin x}+\dfrac{2\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{2\cos 3x}{\cos x}=5.$

u) $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2(\sin x+\cos x).$

v) $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x.$

w) $1+\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}+\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}=\cos 2x+2\cos x.$

x) $(2\cos 2x-1)\cos x-\sin x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\sin 3x.$

Đáp án bài tập ôn cuối chương

BT 31. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\left(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3,\ \forall x\in(0;\ 2\pi).$ **(ĐH khối A năm 2002)**

b) $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x.$ **(ĐH khối B năm 2002)**

c) $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0,\ \forall x\in\left[0;\ 14\right].$ **(ĐH khối D năm 2002)**

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện: $1+\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq\dfrac{-1}{2}$

Ta có:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 5(\frac{\sin x+2\sin x\sin 2x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x})=\cos 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 5(\frac{\sin x+\cos x\ \text{ - }\cos 3x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x})=\cos 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 5(\frac{(\sin 2x+1)\cos x}{1+2\sin 2x})=\cos 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x=\cos 2x+3\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=2\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Do $x\in(0;\ 2\pi)$ nên lấy $x_1=\dfrac{\pi}{3}$ và $x_2=\dfrac{5\pi}{3}$. Ta thấy x_1,x_2 thỏa điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình là $x_1=\dfrac{\pi}{3}$ và $x_2=\dfrac{5\pi}{3}$.

b) Ta có:

$$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow(\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0$$

$$\Leftrightarrow\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0$$

$$\Leftrightarrow\cos x\sin 9x\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow\sin 9x\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{9}\\ x=\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

c) Ta có:

$$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 3x+3\cos x-4(\cos 2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0.$$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Do $x \in [0;\ 14]$ nên lấy $k = 0 \vee k = 1 \vee k = 2 \vee k = 3$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} : x = \dfrac{3\pi}{2} : x = \dfrac{5\pi}{2} : x = \dfrac{7\pi}{2}$

BT 32. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2003)**

b) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}\cdot$ **(ĐH khối B năm 2003)**

c) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0.$ **(ĐH khối D năm 2003)**

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$

Ta có:

$\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \sin x(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x) = 0$

TH1: $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn điều kiện

TH2: $1 - \sin x\cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0$ Vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện nghiệm của phương trình là: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

c) Điều kiện: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có:

$\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1 - \cos(x - \dfrac{\pi}{2}))\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\sin^2 x = (1 + \cos x)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \text{cosx})(1 + \text{cosx}) = (1 + \cos x)(1 - \sin x)(1 + \sin x)$

$\Leftrightarrow (1 - \text{sinx})(1 + \text{cosx})(\text{sinx} + \text{cosx}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

BT 33. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$. **(ĐH khối B năm 2004)**

b) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$. **(ĐH khối D năm 2004)**

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có:

$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 - \sin^2 x) = 3(\sin^2 x - \sin^3 x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x + \sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = -2\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có:

$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) - \sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \text{sinx} + \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

BT 34. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$ **(ĐH khối A năm 2005)**

Hướng dẫn giải

$\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow\ 1 + \cos 6x\ \ \cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1\\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2}\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$ **(ĐH khối B năm 2005)**

Hướng dẫn giải

$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\cos x\ \ \sin x + \cos x\ \ = 0$

$$\Leftrightarrow\ \sin x + \cos x\ \ \ 2\cos x + 1\ \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x + 1 = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

c) $\cos^4 x \quad \sin^4 x \quad \cos\ \ x \quad \dfrac{\pi}{4}\left|\sin\ \ 3x \quad \dfrac{\pi}{4}\right| \quad \dfrac{3}{2} \quad 0.$ **(ĐH khối D năm 2005)**

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x-3=0 \Leftrightarrow -\sin^2 2x-\ 1-2\sin^2 2x\ +\sin 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-2\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

BT 35. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{2(\cos^6 x+\sin^6 x)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0.$ **(ĐH khối A năm 2006)**

Hướng dẫn giải

ĐK: $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\ \sin^6 x+\cos^6 x\ -\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\dfrac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\dfrac{4}{3}\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Đối chiếu ĐK suy ra phương trình có nghiệm $x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$

b) $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4.$ **(ĐH khối B năm 2006)**

Hướng dẫn giải

ĐK: $\left\{\begin{array}{l}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}+\sin x\dfrac{\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x\cos x}=4 \Leftrightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$ (thỏa ĐK)

c) $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0.$ **(ĐH khối D năm 2006)**

Hướng dẫn giải

PT $\Leftrightarrow -2\sin 2x\sin x-2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \sin x\ \sin 2x+\sin x\ =0 \Leftrightarrow \sin^2 x\ 2\cos x+1\ =0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

BT 36. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(1+\sin^2 x)\cos x + (1+\cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2007)**

Hướng dẫn giải

PT

$$\Leftrightarrow \ \sin x + \cos x \ \ 1 + \sin x\cos x \ = \ \sin x + \cos x \ ^2 \Leftrightarrow \ \sin x + \cos x \ \ 1 - \sin x \ \ 1 - \cos x \ = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$$

b) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$ **(ĐH khối B năm 2007)**

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x \ \ 2\sin 3x - 1 \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \sin 3x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}\\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.$$

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2.$ **(ĐH khối D năm 2007)**

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

BT 37. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right).$ **(ĐH khối A năm 2008)**

b) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$ **(ĐH khối B năm 2008)**

c) $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x.$ **(ĐH khối D năm 2008)**

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) \neq 0\end{cases}.$

Ta có $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = -4\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=-2\sqrt{2}\sin x\cos x(\cos x+\sin x) \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left(1+\sqrt{2}\sin 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0 \quad (1)\\ 1+\sqrt{2}\sin 2x=0 \quad (2)\end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện).

$(2) \Leftrightarrow \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta có $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sqrt{3}\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0 \quad (1)\\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=0 \quad (2)\end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x+1)=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0(1)\\ \sin 2x-1=0 \ (2)\end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

$(2) \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

BT 38. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$. **(ĐH khối A năm 2009)**

b) $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\sin^3 x)$. **(ĐH khối B năm 2009)**

c) $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$. **(ĐH khối D năm 2009)**

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(1+\sin x - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\sin x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3} = 2x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3} = -2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta có $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

$\Leftrightarrow \sin x - 2\sin^3 x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 3x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x = -3x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

d) Ta có $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3}-5x = x+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3}-5x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x-(\sin 5x+\sin x)-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

BT 39. Giải các phương trình lượng giác sau :

a) $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$ **(ĐH khối A năm 2010)**

b) $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0.$ **(ĐH khối B năm 2010)**

c) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0.$ **(ĐH khối D năm 2010)**

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}$.

Ta có $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=(1+\tan x)\cos x$

$\Leftrightarrow (1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\quad (1)\\ \sin x+\cos 2x=0\,(2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow \tan x=-1$ (loại).

$(2)\Leftrightarrow \sin x+1-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\,(L)\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta có $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x\cos x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos 2x(\cos x+2)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x+2=0\,(VN)\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+\left(2\sin^2 x+\sin x-1\right)+(2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+(\sin x+1)(2\sin x-1)+(2\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x+2=0\,(VN)\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

BT 40. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2011)**

b) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x.$ **(ĐH khối B năm 2011)**

c) $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0.$ **(ĐH khối D năm 2011)**

Hướng dẫn giải

a) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x.\ (1)$ **(ĐH khối A năm 2011)**

- Điều kiện: $\sin x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow \sin^2 x(1+\sin 2x+\cos 2x)=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(2\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x\left(\cos x+\sin x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x+\sin x=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- ➢ $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$
- ➢ $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x.$ **(ĐH khối B năm 2011)**

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x-1+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)-1+\sin x$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x+1)(\sin x-1)-\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x(2\cos x+1)-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2\cos^2 x+\cos x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

c) $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0.$ **(ĐH khối D năm 2011)**

- Điều kiện: $\tan x\neq-\sqrt{3};\cos x\neq 0$

  Pt $\Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x-(\sin x+1)=0$

  $\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right..$$

  Kiểm tra iều kiện, phương trình cĩ nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

BT 41. Giải các phương trình lượng giác sau:

b) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1.$ **(ĐH khối A năm 2012)**

c) $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1.$ **(ĐH khối B năm 2012)**

d) $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x.$ **(ĐH khối D năm 2012)**

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1.$ **(ĐH khối A năm 2012)**

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=2\cos x\Leftrightarrow\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

b) $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1.$ **(ĐH khối B năm 2012)**

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)+\sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \cos x+\sqrt{3}\sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$

c) $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$ **(ĐH khối D năm 2012)**

$\Leftrightarrow (\sin 3x-\sin x)+(\cos 3x+\cos x)-\sqrt{2}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\cos 2x.\cos x-\sqrt{2}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos x+2\sin x-\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ 2\cos x+2\sin x=\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

BT 42. Giải các phương trình lượng giác sau:

b) $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **(ĐH khối A năm 2013)**

c) $\sin 5x+2\cos^2 x=1$. **(ĐH khối B năm 2013)**

d) $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$. **(ĐH khối D năm 2013)**

Hướng dẫn giải

a) $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **(ĐH khối A năm 2013)**

$\text{DK}: \cos x\neq 0$

$\Leftrightarrow 1+\tan x=2(\sin x+\cos x)\Leftrightarrow \cos x+\sin x=2\cos x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

b) $\sin 5x+2\cos^2 x=1$. **(ĐH khối B năm 2013)**

$\Leftrightarrow \sin 5x=1-2\cos^2 x\Leftrightarrow \sin 5x=-\cos 2x\Leftrightarrow \sin 5x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=2x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ 5x=\pi-2x+\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{3\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

c) $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$. **(ĐH khối D năm 2013)**

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0$ hay $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ hay $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hay $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ $\left(k\in Z\right)$

BT 43. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2014)**

Lời giải

Phương trình trên tương đương với

$\sin x+4\cos x-2-\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-2\right)-2\cos x\left(\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-2\right)\left(1-2\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=2\\ 1-2\cos x=0.\end{array}\right.$

Trường hợp 1. $\sin x=2$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2. $1-2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

b) $\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x.$ **(ĐH khối B năm 2014)**

Lời giải

Phương trình trên tương đương với

$\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)-2+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\ \sin x-\sqrt{2}\ \ +2\cos x\ \sin x-\sqrt{2}\ \ =0$

$\Leftrightarrow\ \sin x-\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}+2\cos x\ \ =0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}+2\cos x=0\end{array}\right.$

Trường hợp 1. $\sin x=\sqrt{2}$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2. $\sqrt{2}+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

BT 44. Giải phương trình: $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0.$ **(TN THPT QG năm 2016)**

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sin^2 x - \sin x + 8\sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) + 4(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 4)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + 4 = 0\\ 2\sin x - 1 = 0\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -4$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2. $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

BT 45. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos 3x - \sin 6x \;\; \sin 2x + \sin 4x \;\; = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos 3x - \sin 6x.2.\sin 3x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \;\; \cos 3x - 2\sin 6x\sin 3x \;\; = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos 3x \;\; 1 - 4\sin^2 3x \;\; = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos 3x \;\; 2\cos 6x - 1 \;\; = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 3x = 0\\ 2\cos 6x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

b) $\cos x\cos 2x\cos 3x - \sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\cdot$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$\cos x\cos 2x\cos 3x-\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x\left(\cos 2x+\cos 4x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x\left(\cos 2x-\cos 4x\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x\cos 4x-\sin 2x\cos 2x+\sin 2x\cos 4x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x\cos 4x-\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x+\sin 2x\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\cos 2x+\sin 2x\right)-\sin 2x\left(\cos 2x+\sin 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos 4x-\sin 2x\right)\left(\cos 2x+\sin 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x-\sin 2x=0\\ \cos 2x+\sin 2x=0\end{array}\right.$

$\bullet \cos 4x-\sin 2x=0\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x-\sin 2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$\bullet \sin 2x+\cos 2x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

c) $\cot x+\cos 2x+\sin x=\sin 2x\cot x+\cos x\cot x.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Phương trình đã cho tương đương với

$\cot x+\cos 2x+\sin x=\sin 2x\cot x+\cos x\cot x$

$\Leftrightarrow \cos x+\cos 2x\sin x+\sin^2 x=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-\cos 2x\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x-\cos x-\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left[1-\left(\sin x+\cos x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 1-\left(\sin x+\cos x\right)=0\end{array}\right.$

$\bullet \sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$\bullet 1-\left(\sin x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\left(L\right)\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

d) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x-\cos 2x-\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\ \ 2\cos^2 x-1+\cos x\ \ -\ \ \cos 2x+\cos x\ \ =0$

$\Leftrightarrow\ \ \sin x-1\ \ \cos 2x+\cos x\ \ =0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-1=0\\ \cos 2x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-1=0\\ 2\cos^2 x+\cos x-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

e) $4+3\sin x+\sin^3 x=3\cos^2 x+\cos^6 x.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$4+3\sin x+\sin^3 x=3\cos^2 x+\cos^6 x$

$\Leftrightarrow\ \ \sin x+1\ \ \sin^2 x-\sin x+4\ \ =\ \ 1-\sin x\ \ 1+\sin x\ \ 3+\cos^4 x$

$\Leftrightarrow\ \ \sin x+1\ \ \sin^2 x-\sin x+4-3-\cos^4 x+3\sin x+\sin x\cos^4 x\ \ =0$

$\Leftrightarrow\ \ \sin x+1\ \left[\ \sin x+1\ ^2-\ 1-\sin x\ ^3\ 1+\sin x\ ^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \ \sin x+1\ ^3\left[1-\ 1-\sin x\ ^3\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ \ 1-\sin x\ ^3=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

f) $2\sin^3 x+\cos 2x+\cos x=0.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$2\sin^3 x+\cos 2x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+1-2\sin^2 x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\ \ \sin x-1\ \ +1+\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\ \ 1-\cos x\ \ 1+\cos x\ \ \sin x-1\ \ +\ \ 1+\cos x\ \ =0$

$\Leftrightarrow\ \ 1+\cos x\ \left[2\ \ 1-\cos x\ \ \sin x-1\ \ +1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\cos x=0\ \ 1\\ 2\ \ 1-\cos x\ \ \sin x-1\ \ +1=0\ \ 2\end{array}\right.$

Giải (1): $1+\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Giải (2): Đặt $t=\sin x+\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$. Khi đó, phương trình (2) trở thành

$2\left(t-\dfrac{t^2-1}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow 2t-t^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\left(loai\right)\end{array}\right.$.

$\bullet t=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

g)

$$2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}&2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x\\ &\Leftrightarrow 2\cos x\cos 3x\cos 2x+5=7\cos 2x\\ &\Leftrightarrow (\cos 4x+\cos 2x)\cos 2x+5=7\cos 2x\\ &\Leftrightarrow (2\cos^2 2x-1+\cos 2x)\cos 2x+5-7\cos 2x=0\\ &\Leftrightarrow 2\cos^3 2x+\cos^2 2x-8\cos 2x+5=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\frac{5}{2}(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

h) $\sin^2 x(4\cos^2 x-1)=\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x).$

Lời giải

$$\begin{aligned}&\sin^2 x(4\cos^2 x-1)=\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x)\\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin 3x\cos x\\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin x\cos x+\sin 3x\cos x=0\\ &\Leftrightarrow \sin^2 2x-1-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}-1+\frac{1}{2}\sin 4x=0\\ &\Leftrightarrow \sin 4x-\cos 4x=1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$.

i) $\cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-4\cos 2x\cos x-2\cos^2 x+2=0.$

Lời giải

$\cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-4\cos 2x\cos x-2\cos^2 x+2=0.$

$\Leftrightarrow \cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-4(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos^2 x+2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)-8\cos^3 x-2\cos^2 x+5\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)-(2\cos x+1)(4\cos^2 x-\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sqrt{3}\sin x+\cos x-4\cos^2 x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x-4\cos^2 x+2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=2(2\cos^2 x-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\cos 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)=\cos 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

j) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right].$

Lời giải

ĐK: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$

$\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right].$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\sin x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin^2 x)=(\sin 2x+\cos 2x)\sin x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin 2x+\cos^2 x-\sin^2 x)=(\sin 2x+\cos 2x)\sin x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin 2x+\cos^2 x-\sin^2 x)-(\sin 2x+\cos 2x)\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin 2x+\cos 2x)-(\sin 2x+\cos 2x)\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x+\cos 2x)(\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0(L) \\ \sin 2x+\cos 2x=0 \\ \sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x=-1 \\ \sin x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{4}++k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

k) $\frac{1}{2\cot^2 x+1}+\frac{1}{2\tan^2 x+1}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$

$$\frac{1}{2\cot^2 x+1}+\frac{1}{2\tan^2 x+1}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2(\cot^2 x+1)-1}+\frac{1}{2(\tan^2 x+1)-1}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{2-\cos^2 x}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x(2-\cos^2 x)+\cos^2 x(2-\sin^2 x)}{(2-\sin^2 x)(2-\cos^2 x)}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin^2 x\cos^2 x}{4-2(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{2+\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{8-2\sin^2 2x}{8+\sin^2 2x}=\frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$$
$$\Leftrightarrow 7+\cos 4x=15\cos 4x$$
$$\Leftrightarrow\cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình˜ cho̓ $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

l) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\tan x-1}+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$

$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\tan x-1}+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}+\cos 3x=\sin 2x-\cos 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\cos 3x=\sin 2x-\cos 2x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x-\sin 2x+\cos 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x-\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left[\cos^2 x-\sin^2 x+(\cos x-\sin x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\ (L)\\ \cos x-\sin x=0\\ \cos x+\sin x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pi+k2\pi (k\in\mathbb{Z})$.

m) $3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x.$

Lời giải

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x.$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x\sin x-\cos^2 x\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x(\sin x+\cos x)-\cos^2 x(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(3\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 3\sin^2 x-\cos^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \tan^2 x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

n) $\dfrac{(2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)-2\sin 3x+6\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}+2\cos x+\sqrt{3}=0.$

Lời giải

ĐK:

$2\cos x-\sqrt{3}\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\neq \pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi.$

$\dfrac{(2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)-2\sin 3x+6\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}+2\cos x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)-2\sin 3x+6\sin x+1+(2\cos x+\sqrt{3})(2\cos x-\sqrt{3})}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$

$\Rightarrow (2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)-2(3\sin x-4\sin^3 x)+6\sin x+1+4\cos^2 x-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)+8\sin^3 x+1+4(1-\sin^2 x)-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)+8\sin^3 x-4\sin^2 x+2=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x)+2(2\sin x+1)(2\sin^2 x-2\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(1-2\sin^2 x+\sin x+4\sin^2 x-4\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(2\sin^2 x-3\sin x+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x+1=0\\ 2\sin^2 x-3\sin x+3=0(VN)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Vậy nghiệm của phương trình $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

o) $\sqrt{\dfrac{3}{4}\quad \cos^2 x}\quad \sqrt{\dfrac{3}{4}\quad \dfrac{1}{2}\quad \cos 2x}\quad 2.$

$\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x}=2.$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot(1-2\sin^2 x)}=2.$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\sin^2 x}=2$

$VT=1.\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+1.\sqrt{\dfrac{1}{4}+\sin^2 x}\leq\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x+\dfrac{1}{4}+\sin^2 x}=2$

$\Rightarrow VT=2\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}+\cos^2 x=\dfrac{1}{4}+\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

- **TRÊN ĐÂY LÀ CÁC DẠNG BÀI TẬP ĐIỂN HÌNH VÀ GIẢI CHI TIẾT - HY VỌNG LÀ TÀI LIỆU BỔ ÍCH GIÚP CÁC THẦY CÔ TRONG QUÁ TRÌNH BIÊN SOẠN ĐỂ GIẢNG DẠY CŨNG NHƯ CÁC EM HỌC SINH CÓ TÀI LIỆU THAM KHẢO TỰ HỌC**
- **THỜI GIAN BIÊN TẬP NGẮN + NĂNG LỰC CÒN HẠN CHẾ, CHẮC CHẮN KHÔNG THỂ TRÁNH ĐƯỢC NHỮNG SAI SÓT, MONG BẠN ĐỌC THÔNG CẢM VÀ GÓP Ý ĐỂ BỘ TÀI LIỆU ĐẠT CHẤT LƯỢNG TỐT HƠN!**
  CHÚC CÁC BẠN CÓ MỘT CHUYÊN ĐỀ THÀNH CÔNG!

- LƯU Ý: BỘ TÀI LIỆU CÒN 500 CÂU TRẮC NGHIỆM - FULL GIẢI DO BAN BIÊN TẬP BTN SOẠN GIẢI - CÁC THẦY CÔ CÙNG CÁC EM TÌM ĐỌC NHÉ !

THẦY TRẦN TÀI - 0977.413.341

THÂN TẶNG